物理数学 C・D 講義ノート

東邦大学理学部物理学科
関口 雄一郎

2022 年 8 月 23 日

目次

参考にするとよいであろう文献

微積分 (多変数の場合を含む)・ベクトル解析、線形代数を学ぶための**自習書**[*1]

- 前野昌弘, 「ヴィジュアルガイド物理数学 1,2」, (東京図書)
- 奥村吉孝, 手嶋忠之, 「基礎から学び考える力をつける線形代数」, (プレアデス出版)
- 畑山明聖, 櫻林徹, 「工学・物理のための基礎ベクトル解析」, (コロナ社)

微積分 (多変数の場合を含む)・ベクトル解析、線形代数の基礎事項が身についているかどうかの**確認書**[*2]

- 石川洋, 「はじめての物理数学」, (東北大学出版会)

微積分 (多変数の場合を含む)・ベクトル解析、線形代数の理解のための**副読書**

- 荒木修, 齋藤智彦, 「本質から理解する数学的手法」, (裳華房)

複素関数論の理解のための**副読書**[*3]

- 山本直樹, 「複素関数論の基礎」, (裳華房)

解析力学を理解するための**副読書**[*4]

- 須藤靖, 「解析力学・量子論」, (東京大学出版会)
- 早田次郎, 「現代物理のための解析力学」, (サイエンス社)

弾性体力学・流体力学の物理の**入門書**

- 恒藤敏彦, 「弾性体と流体」, (岩波書店)

ベクトル解析・テンソル解析の**教科書**

- ダニエル・フライシュ (河辺 哲次 訳), 「物理のためのベクトルとテンソル」, (岩波書店)

抽象線形代数、双対空間についての**参考書**[*5]

[*1] 個人的におすすめできる教科書である。特に、ベクトル解析のものは、入門というには少し程度が高いが、よいと思う。

[*2] これで習得しようと思ってはいけないが、コンパクトなので、一通り学んだ後の参照用として良いかもしれない。

[*3] 素晴らしいの一言。ただし、複素関数論を学ぶはじめの 1 冊として読むより、一般的な教科書である程度もがいた後に読むことをおすすめする。そうしないと価値が半減すると思う。

[*4] 須藤さんの本は最近新版がでたのでそちらをどうぞ。早田さんの本はかなり高レベル。

[*5] 2 年次に読んでも難しくてちんぷんかんぷんだと思う。こんな数学の世界もあるんだということで。

- 斎藤 毅著,「線形代数の世界:抽象数学の入り口」, (東京大学出版会)

第 1 章

ハミルトンの原理とオイラー・ラグランジュ方程式 (1): 1 次元の場合

質点または質点系の運動はニュートンの 3 法則にまとめられるが、第 2 法則 (運動方程式) には不満な点も多い。例えば、運動方程式はデカルト座標系ではすっきりとした形をしているが、他の座標系では複雑な形になるし、その変換は自明ではない。このことは、極座標系を用いたほうが解析がしやすい中心力問題などを考える場合にちょっとした面倒をもたらす (演習問題 2.2)。したがって、もしも、座標系に依らない原理原則に基づいた定式化が可能になれば、様々な面で便利で役に立つことが想定される。本章では、「ハミルトンの原理 (最小作用の原理)」に基づいて、上記のような性質を満たす、ニュートンの運動方程式と等価な方程式が得られることを導く[*1]。

1.1 ハミルトンの原理

天下りではあるが、ハミルトンの原理をここで述べておく。以下では、q は位置を、$\cdot$ (ドット) は時間微分をあらわす。すなわち $\dot{q}$ は速度に対応する。

ハミルトン (Hamilton) の原理

時刻 t_1 から時刻 t_2 の間に力学系 (あるいはもっと広く物理系) が運動する経路は、経路 $q(t)$ を一つ決めたときに定まる、作用とよばれる汎関数 (積分)

$$S[q(t)] \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \tag{1.1}$$

が極値 (極小, 最小) となるような経路である。ここで、$L(q, \dot{q}, t)$ はラグランジアンと呼ばれ、ニュートン (Newton) 力学系では、

$$L = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャルエネルギー}) = T - U \tag{1.2}$$

で与えられる。

[*1] 本講義では多変数関数の微積分の入門的知識が必要不可欠になる。ベクトル解析の初歩についてもある程度習熟していることが望ましい。これら事項の**確認**として、次の教科書の該当箇所を読むことを推奨する。石川洋, 「はじめての物理数学」(東北大学出版会), および荒木修, 齋藤智彦, 「本質から理解する数学的手法」(裳華房)。これらの教科書を難しく感じる場合には、より入門的な教科書で**勉強**するしかない。たとえば、微積分であれば、前野昌弘, 「ヴィジュアルガイド物理数学 1,2」(東京図書), 線形代数であれば、奥村吉孝, 手嶋忠之, 「基礎から学び考える力をつける線形代数」(プレアデス出版) を挙げておく。

作用 $S[q]$ が最小となる経路をが実現されるということは、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの比が同じであれば、その絶対値が小さくなる経路 (エネルギーが最小の経路) が選ばれるということである。また、エネルギーの絶対値を固定して考えれば、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーが同程度になるような経路が実現するということである[*2]。

本章の主目的の 1 つは、(1) ハミルトンの原理の内容を理解し、(2) ハミルトンの原理から「時刻 t_1 から時刻 t_2 の間の経路」を決定する方程式、すなわち運動方程式が得られることを示すことである。

1.1.1　関数の微分 (変分) と極値条件

さて、汎関数[*3](積分) が極値をとるという条件を、1 変数関数 $f(x)$ が極値をとるということから類推しよう。1 変数関数の場合、極値条件は $f' = df/dx = 0$ であるが、これは微分の定義を用いると、

$$0 = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \tag{1.3}$$

とあらわされる。ここで、右辺が $\delta x \to 0$ の極限でゼロになるためには、

$$\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} = O(\delta x) \sim \delta x \tag{1.4}$$

であればよい。ここで「$= O(\delta x)$」は「大きいとしてもせいぜい δx の 1 次の大きさ」という意味で、「$\sim \delta x$」は「大体 δx の 1 次の大きさ程度」という意味である[*4]。

変分を考える際には、δx は小さい ($\delta x \ll 1$) と思っているので、$\delta x \gg (\delta x)^2$ であることに注意しよう。したがって、$O(\delta x)$ には、$(\delta x)^2, (\delta x)^3$ など、δx のより高次の項 (δx よりも小さい項) が一般には含まれている。そのため、右辺の結果に $(\delta x)^2$ のような δx の高次項が加わっても問題ないが、定数項や $1/\delta x$ のような項が含まれる場合には極値条件が満たされないことに注意しよう。

(1.4) 式の両辺を δx で乗じて考えれば、

$$f(x+\delta x) - f(x) = O((\delta x)^2) \sim (\delta x)^2 \tag{1.5}$$

であれば $df/dx = 0$ となり $f(x)$ は極値をとると結論付けられる。ここで、しばしば左辺を

$$\delta f \equiv f(x+\delta x) - f(x) \tag{1.6}$$

と表し、関数 $f(x)$ の微小変化と呼ぶ。

この意味をとらえ直すと、x とその微小近傍の点 $x + \delta x$ で関数 $f(x)$ の値を比べても、δx の **1 次まで**では差がないことが、関数 $f(x)$ が極値をとる条件になっている[*5]。あるいは、

関数 $f(x)$ が極値を取る条件

関数 $f(x)$ が極値をとる条件は、δf の δx の 1 次までの展開が 0 となることである。

[*2] これを「エネルギー等分配則」の一つの形態と見ることも、できるかもしれない。例えば、すごいスピンで回したコマが重い部分を上にしてひっくり返るのは、(摩擦などの効果によって「ひっくり返る」という運動が可能である場合には)、大きすぎる回転エネルギーを重力ポテンシャルエネルギーに分配したほうが、(重たいものを上にするという一見エネルギー的には損にみえるが)、ハミルトンの原理にはより適合するため、という「解釈」をすることも (無理矢理ではあるが) 一応可能かもしれない。

[*3] 点を決めたときに一つ値を返すものを関数という。点の代わりに関数 (経路は時間の関数である) を決めたときに値を返すものを汎関数という

[*4] 両者の意味は厳密には違うが、本講義ノートではあまり神経質にならず両者をだいたい同じことを意味するものとして扱う。

[*5] δx の 1 次のオーダーまでしか考慮しないのであれば、もっともっと小さい量 $(\delta x)^2$ などは無視してよい。出席課題 1.1.3 参照

出席課題 S.1.1： $f(x+\delta x)$ のテイラー展開を用いて、以下の式を示せ。

$$f(x+\delta x)-f(x)=f'(x)\delta x+O\big((\delta x)^2\big) \tag{1.7}$$

また、この結果は微分の定義と整合的であることを示せ。

略解　テイラー展開

$$f(x+\delta x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\delta x)^n\frac{d^n}{dx^n}f(x) \tag{1.8}$$

を左辺に代入すれば右辺が直ちに得られる。また、(1.7) 式の両辺を δx で割れば、

$$\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}=f'(x)+O(\delta x) \tag{1.9}$$

となるが、ここで $\delta x\to 0$ の極限を取れば、$\lim_{\delta x\to 0}O(\delta x)=0$ であるから、微分の定義

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}=f'(x) \tag{1.10}$$

となるので整合的である。

出席課題 S.1.2： 2 変数関数のテイラー展開について、以下の式を示せ。

$$f(x+\delta x,y+\delta y)=f(x,y)+\delta x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\delta y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+O\big((\delta x)^2,\delta x\delta y,(\delta y)^2\big) \tag{1.11}$$

略解　まずはじめに x についてのテイラー展開をを行い、続いて y についてのテイラー展開を行う。δx, δy の 1 次までで

$$\begin{aligned}
f(x+\delta x,y+\delta y)&=f(x,y+\delta y)+\delta x\frac{\partial f(x,y+\delta y)}{\partial x}+O\big((\delta x)^2\big)\\
&=\left[f(x,y)+\delta y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+O\big((\delta y)^2\big)\right]+\delta x\frac{\partial f(x,y+\delta y)}{\partial x}+O\big((\delta x)^2\big)\\
&=f(x,y)+\delta y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+\delta x\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\delta y\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}+O\big((\delta y)^2\big)\right]+O\big((\delta x)^2,\,(\delta y)^2\big)\\
&=f(x,y)+\delta x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\delta y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}+O\big((\delta x)^2,\,\delta x\delta y,\,(\delta y)^2\big)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

出席課題 S.1.3： $f(x_0+\delta x)$ のテイラー展開と $f(x_0)$ を比べ、「両者に δx の 1 次までで差がない」という条件から「$f(x)$ が $x=x_0$ で極値をとる」という帰結が得られることを示せ。また、この結果より、$f(x)$ が極値を取るかどうかを考える場合には、δf の 1 次までの展開を計算し、その結果が 0 になるかどうかを考えればよいことを納得せよ。

略解　$f(x_0+\delta x)$ を $x=x_0$ のまわりでテイラー展開 $f(x_0+\delta x)=f(x_0)+\delta xf'(x_0)+\frac{1}{2}(\delta x)^2f''(x_0)+\cdots$ と $f(x_0)$ の差 δf は、

$$\delta f=f(x_0+\delta x)-f(x_0)=\delta xf'(x_0)+\frac{1}{2}(\delta x)^2f''(x_0)+\cdots \tag{1.13}$$

である。δx の 1 次までで差がない条件は、

$$\delta f=\delta xf'(x_0)=0 \tag{1.14}$$

である。$\delta x\neq 0$ より $f'(x_0)=0$ であり、$f(x)$ は $x=x_0$ で極値を取る。

ここで、(1.14) 式は δf の δx の 1 次までの展開そのものであるから、$f(x)$ が極値を取るかどうかを考える場合には、δf の 1 次までの展開を計算し、その結果が 0 になるかどうかを考えればよいことがわかる。

出席課題 S.1.4：　1 次の微小量までを考える。2 変数関数について

$$df = f(x+dx)) - f(x) = d\boldsymbol{r} \cdot (\nabla f) \tag{1.15}$$

を示せ。ここで $d\boldsymbol{r} = dx\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + dy\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$, $\nabla f = (\partial_x f)\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + (\partial_y f)\,\hat{\boldsymbol{e}}_y$ である。また、$df = 0$ をあたえる $d\boldsymbol{r}$ をつなぎ合わせると f の等高線が得られることを示せ。これより、f の等高線の接ベクトルは勾配 ∇f に垂直であることを示せ。

略解　S.1.2 で示した 2 変数関数のテイラー展開の結果 (1.11) より、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = d\boldsymbol{r} \cdot (\nabla f) \tag{1.16}$$

より直感的には、常微分を偏微分に代え、増える方向 (傾き) が x, y の 2 方向あるから、df の変化量として加えることでも得られる。

勾配 ∇f は関数 f を与えたときに同時に決まるものであるから、すでにベクトル場として (x, y) 平面を埋め尽くしている。

$f(x_0, y_0) = C_0$ を満たす 1 点 $P_0(x_0, y_0)$ をとり、そこから $df = 0$ となるような変位ベクトル $d\boldsymbol{r}$ を考えると、その方向には f は変化しない。すなわち、$f(x_0 + dx, y_0 + dy) = C_0$ である。P_0 からはじめて、これを繰り返して $d\boldsymbol{r}$ をつなぎ合わせていけば、f の等高線が得られる。さらに、はじめに選ぶ C_0 を連続的に変化させれば、(x, y) 平面を f の等高線で埋め尽くすことができる。例えば x 軸は、$f(x, y) = y$ の等高線である。

逆に言えば、$df = 0$ を与える $d\boldsymbol{r}$ は f の等高線の接ベクトルになっており、等高線の作り方からも明らかなように、接ベクトル $d\boldsymbol{r}$ と勾配 ∇f は垂直である。f が力のポテンシャルの場合、これは、力の方向 (勾配ベクトルの方向) が等ポテンシャル面に垂直であることを意味している。

以下補足：

尚、x, y が時間 t の関数である場合には、両辺を dt で割れば、

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \boldsymbol{v} \cdot (\nabla f) \tag{1.17}$$

という表式も得られる。ここで $\boldsymbol{v} = (dx/dt, dy/dt) = (\dot{x}, \dot{y})$ である。

2 変数 (2 次元) の場合、$df = d\boldsymbol{r} \cdot \nabla f$ を満たす $d\boldsymbol{r}$ は、その大きさの不定性を覗いて唯一に定まる (つまり、方向は 1 つだけである)。実際、$d\boldsymbol{r} = a\hat{\boldsymbol{e}}_x + b\hat{\boldsymbol{e}}_y$ とすると、$df = 0$ より

$$\frac{a}{b} = -\frac{\partial_y f}{\partial_x f} \tag{1.18}$$

となり、a と b の比、すなわち $d\boldsymbol{r}$ の方向は唯一つに定まる[*6]。

3 変数 (3 次元) の場合 $df = 0$ を満たす $d\boldsymbol{r}$ は唯一には定まらない[*7]。実際、1 次独立な $d\boldsymbol{r}$ は 2 つ存在する[*8]。

[*6] この事実はまた、2 変数の場合には $u(x, y)dx + v(x, y)dy$ を全微分にする積分因子が必ず存在することとも深く関連している。例えば、熱力学第一法則において $d'Q = dU + PdV$ であるが、積分因子 $1/T$ を用いることによって $dS = \dfrac{1}{T}(dU + PdV)$ のようにエントロピーの全微分で表すことができる (演習問題 3.6 参照)。ただし、3 変数以上になると積分因子の存在は無条件では成り立たなくなる。熱力学では 3 変数以上の場合も取り扱うが、その場合にも積分因子 $1/T$ が存在して $d'Q = TdS$ とできることを保証しているのが熱力学第 2 法則である (演習問題 4.8 参照)。熱力学第 2 法則が含む内容は実に奥深い。

[*7] これが、3 変数以上になると積分因子の存在は無条件では成り立たなくなる理由と関連している。

[*8] これらを $d\boldsymbol{r}_1 = a_1\hat{\boldsymbol{e}}_x + b_1\hat{\boldsymbol{e}}_y + c_1\hat{\boldsymbol{e}}_z$, $d\boldsymbol{r}_2 = a_2\hat{\boldsymbol{e}}_x + b_2\hat{\boldsymbol{e}}_y + c_2\hat{\boldsymbol{e}}_z$ として、6 つの係数を決めればよい。2 つの直交条件 $d\boldsymbol{r}_1 \cdot \nabla f$, $d\boldsymbol{r}_2 \cdot \nabla f$ に加え、$d\boldsymbol{r}_1$, $d\boldsymbol{r}_2$ の規格化条件 2 つ、直交条件 1 つ ($d\boldsymbol{r}_1 \cdot d\boldsymbol{r}_2 = 0$)、向き付け条件 1 つ ($d\boldsymbol{r}_1 \times d\boldsymbol{r}_2 = \nabla f/|\nabla f|$: 右手系か左手系か) の 4 条件、合わせて 6 つの条件があるので、 $d\boldsymbol{r}_1$、$d\boldsymbol{r}_2$ が決められる。すなわち、1 次独立なベクトルが 2 つ存在する。ただし、$d\boldsymbol{r}_1$, $d\boldsymbol{r}_2$ の張る平面での回転の不定性は残る。これは、$d\boldsymbol{r}_1 \times d\boldsymbol{r}_2 = \nabla f/|\nabla f|$ の条件だけでは決めきれない自由度である。

1.1.2　作用の変分と極値条件

前節での考察の結果を汎関数である作用が極値をとる条件に適用する。すなわち、「経路 $q(t)$ とそれと 1 次の微小量 $\delta q(t)$ しか違わない別の経路 $q(t)+\delta q(t)$ で作用 $S[q(t)]$ を比べても 1 次の微小量 (1 次のオーダー) では差がない」ということである。数式で書けば

作用 $S[q]$ が極値を取る条件

$$\delta S \equiv S[q(t)+\delta q(t)] - S[q(t)] = 0 \tag{1.19}$$

となる。**ここで 1 次の微小量の範囲では 0 になるということを単に「$=0$」とあらわした**。

このような汎関数の変化量 δS を (1 次の) 変分と呼ぶ[*9]。すなわち、**ハミルトンの原理は、力学系は作用の (1 次の) 変分がゼロとなるような軌道を運動する**ということを主張している。

ハミルトンの原理における作用の変分 δS の計算のためには、$\delta S = \int dt\delta L$ より、ラグランジアン L の変分 δL を計算する必要がある。

$$\delta L \equiv L\left(q+\delta q,\, \frac{d}{dt}(q+\delta q),\, t\right) - L(q,\dot{q},t) = L\big(q+\delta q,\, (q+\delta q)^\bullet,\, t\big) - L(q,\dot{q},t) \tag{1.20}$$

において、まず、$q' \equiv q+\delta q$ とすると

$$\delta\dot{q} = \dot{q}' - \dot{q} = \frac{d}{dt}(q'-q) = \frac{d}{dt}(\delta q) = (\delta q)^\bullet \tag{1.21}$$

であるから、**微分と変分は交換してよい**ことに注意する。よって、

$$\begin{aligned}\delta L &= L(q+\delta q,(q+\delta q)^\bullet,t) - L(q,\dot{q},t)\\ &= L(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t) - L(q,\dot{q},t) = \left[L(q,\dot{q},t) + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right] - L(q,\dot{q},t)\\ &= \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\end{aligned} \tag{1.22}$$

となる。

この結果と、$L=L(q,\dot{q},t)$ を多変数関数だとみなした場合の全微分

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t}dt \tag{1.23}$$

を比べる。今の場合には時間をずらすことは考えていないので $dt=0$ だから、(1.22) 式とラグランジアンの全微分の結果は全微分 d を変分 δ に変えるだけで一致する。すなわち、**変分は基本的に全微分と同じものである**と考えてよい。

結局、作用の変分は、

$$\delta S = \delta S \equiv S[q(t)+\delta q(t)] - S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] \tag{1.24}$$

となる。

[*9] 単に「変分」と言った場合には、1 次の変分を表すことが多く、(1 次の) という説明は省略されることが多い。

1.2　オイラー・ラグランジュ方程式

1.2.1　ハミルトンの原理から運動方程式が導かれる理屈

さて、ハミルトンの原理という、一見、ニュートンの第2法則はおろか、方程式そのものすら導かれるとは思われない原理から、オイラー・ラグランジュ方程式と呼ばれる運動方程式が導かれるのであるが、そのからくりを述べておこう。それは以下のようになる。

もし $\delta S = 0$ の極値条件が、δq で括って

$$0 = \delta S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \Big[L\text{ に関する何らかの関係式} \Big] \delta q\, dt \tag{1.25}$$

という形に変形できたとしよう。ここで δq でくくった形にした点がポイントである。すると、**どんな微小変化 δq に対しても極値条件が成り立つ**ためには、

$$\Big[L\text{ に関する何らかの関係式} \Big] = 0 \tag{1.26}$$

が常に成り立っていなければならないことになる。実はこれが運動方程式になっているのである。次節でこれを導こう。

1.2.2　オイラーラグランジュ方程式の導出

(1.25) 式のように δq をくくりだすためには、(1.22) 式の右辺第2項にある $\delta\dot{q} = \dfrac{d}{dt}(\delta q)$ を何とかしなければならない。そのためには部分積分を行う必要がある[*10]。(1.22) 式の右辺第2項を部分積分すれば、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt}\left(\delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \delta q \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \right] dt \tag{1.27}$$

となるが、この式の右辺第2項は、**変分の端点が固定されている条件**[*11]

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{1.28}$$

を用いると、

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}\left(\delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \int_{t_1}^{t_2} d\left(\delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \left[\delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{1.29}$$

となって消える[*12]。

結局、

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \right] \delta q\, dt \tag{1.30}$$

が任意の変分 δq について成り立たなければならないから、被積分関数がゼロでならなければならず、

[*10] $d(fg) = (df)g + f(dg)$ から直ちに分かる $(df)g = d(fg) - f(dg)$ で $f = \delta q$, $g = \partial L/\partial \dot{q}$, および $d = d/dt$ とする。

[*11] 今考えているのは $t = t_1$ に $x_1 = x(t_1)$ からスタートして、$t = t_2$ に $x_2 = x(t_2)$ に到達するような運動である。もしも端点が固定されていないと、始点と終点が別のものになってしまい、問題の前提が崩れてしまう。

[*12] 積分が分からなかった場合には $X \equiv \delta q \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ と変数変換したと考えてみよ。この手の積分は頻繁に出てくるので、ここで確実に納得しておくこと。

オイラー・ラグランジュ (Euler-Lagrange) 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0 \tag{1.31}$$

が得られる。これが**オイラー・ラグランジュ方程式**である。

1.2.3 オイラーラグランジュ方程式からニュートンの運動方程式へ

果たしてオイラー・ラグランジュ方程式からニュートンの運動方程式が導かれるのであろうか。まずは実際に 1 次元運動する粒子の場合に確かめてみよう。ハミルトンの原理のところで述べた ((1.2) 式) ように、ラグランジアンとして ($q = x$ として)

$$L(x, \dot{x}, t) = T(\dot{x}) - U(x, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x, t) \tag{1.32}$$

をとればよい。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \tag{1.33}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F \tag{1.34}$$

であるから、ただちにニュートンの運動方程式

$$m\ddot{x} = F \tag{1.35}$$

が得られることが分かる。

1.3 アインシュタインの和の規約

ここで、本講義すべてにわたって用いられる必須の記法である「アインシュタインの和の規約」について解説する。きちんと使いこなせるようになるためには、ベクトル解析および行列の演算、多変数関数の微積分の基礎を習得していることが肝要となる。本章の主目的の 2 つ目は、このアインシュタインの和の規約に習熟することである。

1.3.1 アインシュタインの和の規約の定義

アインシュタインの和の規約とは

アインシュタインの和の規約

上付き添字と下付き添字に同じものがある場合には、とくに混乱のおそれのない限り、和をとる。

という単純なものである。その際、**添字の上下への割り振りの仕方は (今のところ) 気にしない**。例えば 3 次元ベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ は、その成分 A^i, B^i を用いて、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^{3} A^i B^i = A_i B^i = A^i B_i \tag{1.36}$$

とあらわされる。

ここで、添字に数字を用いているが、デカルト座標では $A^1 = A^x$, $A^2 = A^y$, $A^3 = A^z$ と考える[*13]。同様に座標 (x, y, z) をまとめて x^i, $(i = 1, 2, 3)$ と書く。この場合、$x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ である。添字 i の取る範囲が文脈から明らかな場合には $(i = 1, 2, 3)$ の断り書きは省略される。以下では特に断り書きのない場合には、デカルト座標が採用されているものとする。

ここで重要な点を注意しておく。内積計算をより正確に表せば、δ_{ij} をクロネッカーのデルタとして (1.4 節参照)、次の性質

$$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = \delta_{ij} \tag{1.37}$$

を満たす**正規直交基底** $\{\hat{\boldsymbol{e}}_i\}$ を採用した場合に、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= \left(\sum_i^3 A^i\hat{\boldsymbol{e}}_i\right)\cdot\left(\sum_j^3 B^j\hat{\boldsymbol{e}}_j\right) = \sum_i^3\sum_j^3 A^iB^j(\hat{\boldsymbol{e}}_i\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_j) = \sum_i^3\sum_j^3 A^iB^j\delta_{ij}\\ &\overset{(1.80)}{=} \sum_i^3 A^iB_i = \sum_i^3 A^iB^i\end{aligned} \tag{1.38}$$

となるので、(1.36) 式のような成分計算ができる[*14]。A_iB^i とあらわすか、A^iB_i と表すかは自由である。**以下では、正規直交基底が常に選ばれているものとして、(1.36) 式のような成分計算を考えることにする**。

出席課題 S.1.5：　デカルト座標の場合に具体的に (1.38) 式の計算を行え。

略解　内積が分配則を満たすことを利用して、$\boldsymbol{A} = A^x\hat{\boldsymbol{e}}_x + A^y\hat{\boldsymbol{e}}_y + A^z\hat{\boldsymbol{e}}_z$ と $\boldsymbol{B} = B^x\hat{\boldsymbol{e}}_x + B^y\hat{\boldsymbol{e}}_y + B^z\hat{\boldsymbol{e}}_z$ の内積計算

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A^xB^x\big(\hat{\boldsymbol{e}}_x\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_x\big) + A^xB^y\big(\hat{\boldsymbol{e}}_x\cdot\hat{\boldsymbol{e}}_y\big) + \cdots \tag{1.39}$$

を具体的に行えばよい。公式 (1.80) との関連について納得できるか考えてみること。

1.3.2　和が取られている添字の書き換え

アインシュタインの和の規約に関するもっとも基本的な事項の一つが**和が取られている添字の書き換え**である。すなわち、

和が取られている添字の書き換え

アインシュタインの和の規約に従って和が取られている添字は、**他の添字との競合がない限り**他の添字に書き換えることができる。

例えば、ベクトルの内積は、

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_iB^i = A_kB^k \tag{1.40}$$

のように添え字 k を用いて表してもよい。なぜならば、この式の意味は

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \sum_{i=1}^3 A_iB^i = \sum_{k=1}^3 A_kB^k \tag{1.41}$$

であるが、和を取る添字を変えても同じ内容を表しているからである[*15]。

[*13]極座標では $A^1 = A^r$, $A^2 = A^\theta$, $A^3 = A^\varphi$ とすることが多い。円筒座標では $A^1 = A^\varpi$, $A^2 = A^z$, $A^3 = A^\varphi$ が普通であると思うが、文献によっては $A^1 = A^\varpi$, $A^2 = A^\varphi$, $A^3 = A^z$ としている場合もある。

[*14]$\hat{\boldsymbol{e}}_i \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_j = \delta_{ij}$ を満たさない座標系ではこのような計算はできない。

[*15] 同様の例が積分における積分変数の変換である：

$$\int f(x)dx = \int f(y)dy \tag{1.42}$$

また、ベクトルの内積には和が取られている添字しかあらわれず、自由に変わることのできる添字は残っていない。このことは、内積がスカラーであることと整合的である。一方、添字を 2 つ持つ量 A_{ij}[*16]とベクトル B^i の積[*17]

$$A_{ij}B^j = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}B^j \tag{1.43}$$

を考えると、左辺には添字 i が和が取られることなく残っている。このことは、$A_{ij}B^j$ が全体としてベクトル的な量であることを意味している[*18]。添字の書き換えに関して、内積の場合と同様に、

$$A_{ij}B^j = A_{ik}B^k = A_{il}B^l \tag{1.44}$$

のような操作が許されることも確認しよう。

次に、添字を 2 つ持つもの同士の積[*19]、

$$A_{ik}B^{kj} = \sum_{k}^{3} A_{ik}B^{kj} \tag{1.45}$$

を考える。左辺には添字 i と j の 2 つが残っているから、$A_{ik}B^{kj}$ は全体として行列的な量である[*20]。この場合にも $A_{ik}B^{kj} = A_{il}B^{lj} = A_{im}B^{mj}$ のような添え字の書き換えが可能である。

しかし、次のような k から i への添字の書き換えは、添字 i について競合が起こるために許されない：

$$A_{ik}B^{kj} = A_{ii}B^{ij} \quad (\text{許されない添字の書き換え}) \tag{1.46}$$

左辺と右辺で和のとり方の意味が変わってきてしまうからである。実際、アインシュタインの和の規約どおりに計算すると、

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=1}^{3} A_{ik}B^{kj} = A_{i1}B^{1j} + A_{i2}B^{2j} + A_{i3}B^{3j} \tag{1.47}$$

$$(\text{右辺}) = \sum_{i=1}^{3} A_{ii}B^{ij} = A_{11}B^{1j} + A_{22}B^{2j} + A_{33}B^{3j} \tag{1.48}$$

となっている。

また、そもそも左辺が添字 2 つを持つ「行列的」な量であるのに対して、右辺は添字を 1 つしか持たない「ベクトル的」な量となっている。(行列 = ベクトル) ということはありえないのでこの観点からしてもそもそもおかしい。この原因は、和の取られている添字 k を i に変えてしまうと、A_{ik} の添字 i との競合が起きてしまうからである。すなわち、**他の添字と競合が起こるような添字の書き換えは許されない**。

1.3.3　その他の注意事項

複数の添字についての和

和をが取られる添字は 1 つだけとは限らない。例えば、2 つの添字に関する和は

$$A_{ik}B^{ik} = \sum_{i}^{3}\sum_{k}^{3} A_{ik}B^{ik} = \sum_{i}^{3}\sum_{j}^{3} A_{ij}B^{ij} = A_{ij}B^{ij} \tag{1.49}$$

[*16]テンソルと呼ばれるものの成分であるが、現段階では行列 (のようなもの) と考えておいてよい。
[*17]行列がベクトルに作用したものと考えておいてよい。
[*18]行列がベクトルに作用したものがベクトルであったことを思い出そう。
[*19]現段階では行列 (のようなもの) の積と考えておいてよい。
[*20]行列の積が行列であったことを思い出そう。

のようにあらわされる。よりたくさんの添字を持つ量を考えることもできるが (出席課題 S.1.7 参照)、ここでは**テンソル** (の成分) と呼ばれる「ベクトルや行列を拡張したようなもの」があるということだけ納得しておいて、添字操作だけに注目してほしい[*21]。

添字が意味する具体的な内容

どんな場合にも $i = 1$ が x 成分、$i = 2$ が y 成分、$i = 3$ が z 成分を表すとは限らない。例えば、「デカルト座標 x^i から極座標 y^i への変換」といったときには、$x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ であるが、$y^1 = r$, $y^2 = \theta$, $y^3 = \varphi$ である。同様に、「極座標におけるベクトルの成分 V^i」を考える場合には $V^1 = V^r$, $V^2 = V^\theta$, $V^3 = V^\varphi$ である。

添字の上下について

先にも述べたように、$A_i B^i$ とあらわすか、$A^i B_i$ とするかは (今のところは) 自由である[*22]。ただし、$\partial/\partial x^i$ (デカルト座標では $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ を表す) を ∂_i (デカルト座標では $\partial_x f$, $\partial_y f$, $\partial_z f$ である) と表すことを考慮して、**偏微分は下付き添字で表す**ことにする。

基本的に**座標による偏微分は下付き添字**と考えておいてよいが、例えば、ラプラス演算子における 2 階の微分演算子の和など、形式的に偏微分に上付き添字をつける場合もある (出席課題 S.1.6 参照) ので、この決まりは絶対的なものではなく、適宜添字の上下を使い分けることがある。

また、$\partial/\partial x^i = \partial_i$ となることを考慮して、**上付き添字の変数が分母にある場合には、下付き添字を意味する**と考える。例えば、

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k} = \partial_k A^k = \sum_k^3 \partial_k A^k \tag{1.50}$$

である。

一方、**下付き添字の変数が分母にある場合には、基本的に上付きを意味する**と考える。例えば、

$$\frac{\partial A_k}{\partial p_k} = \sum_k^3 \frac{\partial A_k}{\partial p_k} \tag{1.51}$$

においては、分母にあらわれる添字は下付きであるが、上記約束により、分母の下付きは上付きとみなす。すると、分子の下付き添字との間でアインシュタインの和の規約が適用され、右辺のように和が取られるものと解釈される。

出席課題 S.1.6：(デカルト座標の場合に) (1) $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$, (2) $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D})$ をアインシュタインの和の規約を用いて表せ。

略解 (1)　偏微分は下付きにすることに注意して、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \partial_x V^x + \partial_y V^y + \partial_z V^z = \partial_i V^i \tag{1.52}$$

(2)　$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D})$ については、

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D}) = (A_i B^i)(C_i D^i) \tag{1.53}$$

[*21] テンソルの正体についてはおいおい明らかになっていくはずである。

[*22] わざわざ (今のところは) と但し書きをつけたのは、デカルト座標型以外では、一般に上付きと下付きには違いがあるからである。8 章参照。

のように $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ と $(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D})$ で同じ添字 (今の場合は i) を用いて表してはならない。なぜならば、$(A_iB^i)(C_iD^i) = A_iB^iC_iD^i$ であるが、これは

$$A_iB^iC_iD^i = (A_iD^i)(B^iC_i) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) \tag{1.54}$$

とも読み取れてしまうからである。

この原因は $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ と $(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D})$ を表す際の添字 i の競合である。このような問題が生じないように、$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ と $(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D})$ で違う添字を用いて

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}) = (A_iB^i)(C_jD^j) \tag{1.55}$$

のように表す必要がある。この場合には添字の競合がないので間違った解釈をする可能性はない。

尚、添字は競合がない限り書き換えることができるので、$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{D}) = (A_kB^k)(C_lD^l)$ などのように別の添え字を用いてもよい。

出席課題 S.1.7： 次のアインシュタインの和の規約を用いた関係式は不合理 (意味が通らない) か、それとも整合的 (意味が通る) か。理由とともに答えよ[*23]。

(1) $g_{ij}x^ix^j = g_{ij}x^ix^k$, (2) $g_{ij}a^ib^j = g_{jk}a^jb^k = g_{kl}a^kb^l$, (3) $\epsilon_{ijk}a^jb^k = \epsilon_{iji}a^jb^i$

(4) $g_{ij}a^ib^j = g_{ij}a^ic^j$, (5) $\Gamma^i{}_{ik}a^k = g_{ij}a^ib^j$, (6) $\Gamma_{ijk}b^jc^k = b_i$, (7) $\Gamma_{ijk}b^jc^k = b_l$,

(8) $\Gamma_{ijk}a^ib^jc^k = b_i$, (9) $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$, (10) $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$

略解　まずは略解を見ないでかならず自分で挑戦すること。

(1) 左辺はすべての添字で和が取られているのでスカラー (数)。一方、右辺では添字 j と k が残っている。つまり、右辺は 2 つの添字を持つ「行列」的な量になっている[*24]。(スカラー)=(行列) という方程式は不合理であるので、この方程式は不合理。

(2) 和をとる添字が異なっているので一見不合理に見えるが、和をとる添字が違っていても意味をよく考えれば成立しているので整合的。つまり、和をとる添字はダミー添字と呼ばれ、意味が通っていれば自由に付け替えることができる。

(3) 和をとるダミー添字を自由に付け替えることができるといっても、他の添字と競合してはならない。右辺では添字 i に競合があり、意味が変わってきてしまうので不合理。$\epsilon_{ijk}a^jb^k = \epsilon_{ijl}a^jb^l$ とつけかえるのは OK。

(4) 一見不合理に見えるが $b^j = c^j$ であれば成立するので式としては不合理ではない。数式としては (添字としては) 整合的。

(5) 左辺はすべての添字で和が取られているのでただの数。右辺もすべての添字について和が取られているのでただの数。よって整合的。

(6) 左辺は添字 i だけが和を取られずに残っている。つまりベクトル的な量。右辺もベクトル的な量。よって整合的

(7) 左辺も右辺もベクトル的な量であるが、残っている添字が i と l で異なるので不合理。

(8) 左辺はただの数。右辺はベクトル的な量。よって不合理。

(9) 整合的。

(10) 右辺に添字がないから不合理に見えるが、$\boldsymbol{V} = 0$, $V^i = 0$ がゼロベクトルを表すのと同様に、これはすべての i,j,k に対して $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ が 0 であるという意味なので整合的。

出席課題 S.1.8: 添字の書き換え $A^{ik}A_{ik} = A^{ij}A_{ij}$ が可能であることを、アインシュタインの和の規約に従って両辺を展開することで具体的に示せ。

略解　左辺の添字 k についての和を展開すれば、$A^{ik}A_{ik} = A^{i1}A_{i1} + A^{i2}A_{i2} + A^{i3}A_{i3}$ となる。同様に、右辺の添字 j についての和を展開すれば、$A^{ij}A_{ij} = A^{i1}A_{i1} + A^{i2}A_{i2} + A^{i3}A_{i3}$ となる。したがって両者は同等である。

[*23] 以下、添字をたくさん持つ見慣れない記号が出てくるが、ここでは、行列の拡張のようなものとして納得しておき、添字のみの観点から左辺と右辺が整合的であるかどうかのみに着目して問題を解いてほしい。

[*24] $(1,1)$ 型のテンソルという。8 章でより詳しく扱う。

1.4 クロネッカーのデルタ

本章の主目的の 3 つ目は、クロネッカーのデルタとそれを用いた種々の演算を身につけることである。

クロネッカーのデルタは

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{1.56}$$

で定義される。添字が 2 つとも上付き、下付きのものも全く同様に定義される。すなわち、

$$\delta^{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{1.57}$$

このように、その定義は至ってシンプルなものであるが、クロネッカーのデルタを用いた重要な演算が数多く存在する。以下でその重要例を幾つか取り上げる。

1.4.1 クロネッカーのデルタの作用による添字の置き換え

もっともよく使われる演算が次の**添字の置き換え**である。

δ^i_j による添字の置き換え

上付きと下付きの添字を持つクロネッカーのデルタ δ^i_j による和の作用によって添字が置き換わる:

$$V^i\delta^j_i = V^j, \qquad V_i\delta^i_j = V_j, \tag{1.58}$$

$$A_{ij}\delta^j_k = A_{ik}, \qquad A^{ij}\delta^k_j = A^{ik}, \qquad A^j_i\delta^k_j = A^k_i, \qquad A^i_j\delta^j_k = A^i_k \tag{1.59}$$

添字がもっと増えた場合にも同様の置き換えを行えばよい。

[証明]: アインシュタインの和の規約に従って展開すると、

$$V^i\delta^j_i = V^1\delta^j_1 + V^2\delta^j_2 + V^3\delta^j_3 \tag{1.60}$$

である。ここで、右辺は $j = 1$ のとき V^1、$j = 2$ のとき V^2、$j = 3$ のとき V^3 である。この結果を統一的に表せば、右辺は V^j そのものである。よって、$V^i\delta^j_i = V^j$. $V_i\delta^i_j = V_j$ であることも同様にして示せる。また、

$$A_{ij}\delta^j_k = A_{i1}\delta^1_k + A_{i2}\delta^2_k + A_{i3}\delta^3_k \tag{1.61}$$

であるが、右辺は $k = 1$ のとき A_{i1}、$k = 2$ のとき A_{i2}、$k = 3$ のとき A_{i3} である。つまり A_{ik} である。よって、$A_{ij}\delta^j_k = A_{ik}$。(1.59) の他の式も同様にして示せる。

A_{ij} が特にクロネッカーのデルタである場合の

$$\delta_{ij}\delta^j_k = \delta_{ik}, \qquad \delta^{ij}\delta^k_j = \delta^{ik}, \qquad \delta^j_i\delta^k_j = \delta^k_i \tag{1.62}$$

もよく用いられる公式である。

さらに、(1.62) 式の結果を用いると、空間 3 次元の場合に成り立つ次の性質が証明できる：

クロネッカーのデルタの和

$$\delta^i_i = \delta^k_i\delta^i_k = 3, \qquad \delta_{ij}\delta^{ij} = 3. \tag{1.63}$$

この結果を拡張すれば、より一般に空間 D 次元の場合には、

クロネッカーのデルタの和：空間 D 次元の場合

$$\delta_i^k \delta_k^i = D, \qquad \delta_{ij}\delta^{ij} = D \tag{1.64}$$

であることも示すことができる。

[証明]: 空間 3 次元の場合について証明する。クロネッカーのデルタによる添字の置き換えの性質により、

$$\delta_i^k \delta_k^i \overset{(1.62)}{=} \delta_i^i \tag{1.65}$$

さらに、アインシュタインの和の規約により、

$$\delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 3 \tag{1.66}$$

である。

一方、$\delta_{ij}\delta^{ij}$ については、上付きと下付きの添字 i, j のいずれについても和を取らなければならない。定義に従って計算すると、まず j について和を取って

$$\delta_{ij}\delta^{ij} = \delta_{i1}\delta^{i1} + \delta_{i2}\delta^{i2} + \delta_{i3}\delta^{i3}$$

さらに i について和を取れば、

$$\begin{aligned}\delta_{ij}\delta^{ij} &= \delta_{i1}\delta^{i1} + \delta_{i2}\delta^{i2} + \delta_{i3}\delta^{i3} \\ &= (\delta_{11}\delta^{11} + \delta_{21}\delta^{21} + \delta_{31}\delta^{31}) + (\delta_{12}\delta^{12} + \delta_{22}\delta^{22} + \delta_{32}\delta^{32}) + (\delta_{13}\delta^{13} + \delta_{23}\delta^{23} + \delta_{33}\delta^{33}) \\ &= \delta_{11}\delta^{11} + \delta_{22}\delta^{22} + \delta_{33}\delta^{33} = 3.\end{aligned} \tag{1.67}$$

[補足]: この結果は、1.4.3 節におけるクロネッカーのデルタの性質を用いて得られる結果

$$\delta_{ij}\delta^{ij} = \delta_i^i = 3 \tag{1.68}$$

と整合的である。

1.4.2　偏微分および座標変換とクロネッカーのデルタ

2 つの座標系 x^i, X^i を考える。ただし、両者は互いに座標変換で

$$x^i = x^i(X^k), \qquad X^i = X^i(x^k) \tag{1.69}$$

のように関係づけられているとする。

例えば、x^i を 2 次元デカルト座標、X^i を 2 次元極座標とした場合には

$$x^1 = x = r\cos\theta = x(r,\theta) = x^1(r,\theta) \tag{1.70}$$
$$x^2 = y = r\sin\theta = y(r,\theta) = x^2(r,\theta) \tag{1.71}$$

である。同様に $X^i = (X^1, X^2) = (r, \theta)$ を x^i で表すことができるから、$X^i = X^i(x^k)$ である。ここで、X^i の添字 i と引数 x^k の添字 k は独立なので、同じ添字を用いず、i と k の別添字を用いた。

このとき、偏微分および座標変換とクロネッカーのデルタに関して、次の重要な関係式が成り立つ：

座標の偏微分とクロネッカーのデルタ

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j \tag{1.72}$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^k}\frac{\partial X^k}{\partial x^j} = \delta^i_j \tag{1.73}$$

これら 2 つの関係式は重要なので、以下の証明を含め、しっかり理解しておくこと。

[証明]:　(1.72) 式は空間 3 次元のデカルト座標の場合について示す。$x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ とする。$\partial x^i/\partial x^1 = \partial x^i/\partial x$ がゼロとならないのは $i = 1$ のときのみ。すなわち、$\partial x^i/\partial x^1 = \delta^i_1$ と同等。同様に、$\partial x^i/\partial x^2 = \delta^i_2$, $\partial x^i/\partial x^3 = \delta^i_3$ であることが言える。以上の結果をまとめれば、$\partial x^i/\partial x^j = \delta^i_j$ が得られる。より一般の座標の場合にも同様に示すことができる。よって (1.72) 式が成り立つ。

座標 X^i が x^i の関数であるとき、関数 $f(X^k)$ を x^j で微分する。多変数関数の偏微分をアインシュタインの和の規約であらわせば、

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial f}{\partial X^k}\frac{\partial X^k}{\partial x^j} \tag{1.74}$$

ここで、$f(X^k)$ として特に座標 $x^i = x^i(X^k)$ を選ぶと、

$$\frac{\partial x^i}{\partial X^k}\frac{\partial X^k}{\partial x^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j \tag{1.75}$$

出席課題 S.1.9:　空間 3 次元のデカルト座標 x^i から極座標 X^i の場合に、具体的に $\partial f(X^k)/\partial x^i$ を書き下し、(1.74) 式が成り立つことを示せ。

略解　多変数関数の偏微分により、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(X^k)}{\partial x^1} &= \frac{\partial f(r,\theta,\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= \frac{\partial f}{\partial X^1}\frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \frac{\partial f}{\partial X^2}\frac{\partial X^2}{\partial x^1} + \frac{\partial f}{\partial X^3}\frac{\partial X^3}{\partial x^1} \\
&= \frac{\partial f}{\partial X^k}\frac{\partial X^k}{\partial x^1}
\end{aligned} \tag{1.76}$$

同様に、

$$\frac{\partial f(X^k)}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial X^k}\frac{\partial X^k}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial f(X^k)}{\partial x^3} = \frac{\partial f}{\partial X^k}\frac{\partial X^k}{\partial x^3} \tag{1.77}$$

以上をまとめれば、(1.74) 式が成り立つことが分かる。

1.4.3　クロネッカーのデルタについての補足事項

補足事項 1：下付きだけ、上付きだけのクロネッカーのデルタの作用

上付きだけ、下付きだけのクロネッカーのデルタの作用の場合には、添字が置き換わるとともにその上下も変わるものと定義する。すなわち、上付きだけのクロネッカーのデルタ δ^{ij} の作用について、

上付きだけのクロネッカーのデルタの作用

$$\delta^{ij}V_i = V^j \tag{1.78}$$

$$\delta^{ij}A_{ik} = A^j_{k}, \qquad \delta^{ij}A^k_i = A^{jk} \tag{1.79}$$

一方、下付きだけのクロネッカーのデルタ δ_{ij} の作用について、

下付きだけのクロネッカーのデルタの作用

$$\delta_{ij}V^i = V_j \tag{1.80}$$

$$\delta_{ij}A^{ik} = A^k_{j}, \qquad \delta_{ij}A^i_k = A_{jk} \tag{1.81}$$

である。添字がもっと増えた場合にも同様の置き換えを行えばよい。

補足事項 2: **和が取られている添字の上下について**

下付きだけ、上付きだけのクロネッカーのデルタの作用の上記の結果を用いると、

$$A^j_i = A_{ik}\delta^{jk} = A^{jk}\delta_{ik} \tag{1.82}$$

と同一視してよいことが帰結できる。この結果を用いると、

$$\begin{aligned} A^j_i A^i_j &= (A_{ik}\delta^{jk})(A^{il}\delta_{jl}) = A_{ik}A^{il}(\delta^{jk}\delta_{jl}) \\ &= A_{ik}A^{il}\delta^k_l = A_{ik}(A^{il}\delta^k_l) = A_{ik}A^{ik} \\ &= A_{ij}A^{ij} \end{aligned} \tag{1.83}$$

ここで、最後の等号では (1.49) 式で示した和が取られている添字の置き換え操作を行った。すなわち、**和が取られている限り、添字の上下は気にしなくてよい**ことがわかる。

1.A　1 章の演習問題

演習問題 1.1: (重要) オイラー・ラグランジュ方程式の導出

ハミルトンの原理が成り立つとしてオイラー・ラグランジュ方程式を導け。

演習問題 1.2: (重要) 2 次元デカルト座標から 2 次元極座標への座標変換

1.2.1: 微小変位ベクトル $d\boldsymbol{r}$ の変換

2 次元デカルト座標では、位置ベクトルは $\boldsymbol{r} = (x, y)$、微小変位ベクトルは $d\boldsymbol{r} = (dx, dy)$ である[*25]。基底ベクトルを用いてあらわせば

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{e}}_x + y\hat{\boldsymbol{e}}_y, \tag{1.84}$$

$$d\boldsymbol{r} = d(x\hat{\boldsymbol{e}}_x + y\hat{\boldsymbol{e}}_y) = dx\hat{\boldsymbol{e}}_x + xd\hat{\boldsymbol{e}}_x + dy\hat{\boldsymbol{e}}_y + yd\hat{\boldsymbol{e}}_y = dx\hat{\boldsymbol{e}}_x + dy\hat{\boldsymbol{e}}_y \tag{1.85}$$

である (**重要事項**：$d\hat{\boldsymbol{e}}_x = d\hat{\boldsymbol{e}}_y = 0$ であることを用いた)。

2 次元極座標での位置ベクトル、微小変位ベクトルおよび速度ベクトルの表式を求めよ。

[*25] このように成分だけであらわすのは危険である。デカルト座標以外の座標系との関係を考える場合には、基底ベクトルとセットにして表しておくことが重要である！

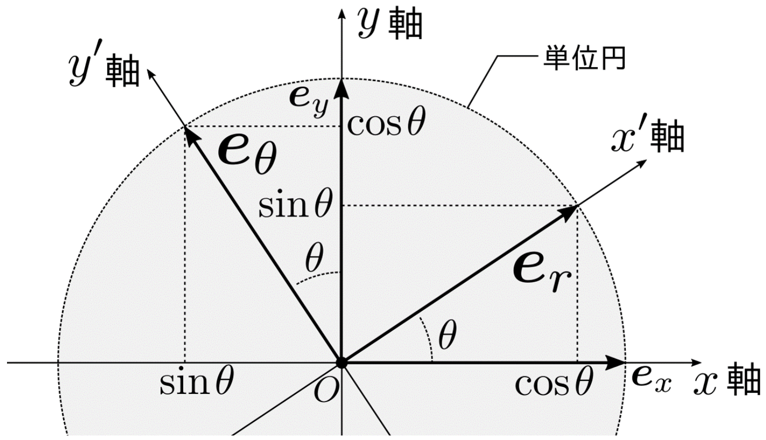

図 1.1　2 次元デカルト座標の基底ベクトルと 2 次元極座標の基底ベクトルの関係

略解：　極座標での基底ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}_r$, $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ を用いれば、2 次元極座標での位置ベクトルが

$$\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r \tag{1.86}$$

となることは、図を書けばすぐに分かる。同様に、極座標 (r, θ) とデカルト座標 (x, y) の座標値の関係が

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{1.87}$$

であることも作図により分かる (図 1.1 参照)。これより、デカルト座標での位置ベクトル (基底 $\hat{\boldsymbol{e}}_x$, $\hat{\boldsymbol{e}}_y$ を用いた場合の位置ベクトル) は

$$\boldsymbol{r} = x\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + y\,\hat{\boldsymbol{e}}_y = r\big(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_y\big) \tag{1.88}$$

と表せる。

(1.86), (1.88) 式を比べれば、基底ベクトルの関係として、

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \tag{1.89}$$

が得られる。これは作図から得られる結果と一致している (図 1.1 参照)。同様に、作図から、

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \tag{1.90}$$

であることが分かる。あるいは、$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = a\hat{\boldsymbol{e}}_x + b\hat{\boldsymbol{e}}_y$ とおき、$\hat{\boldsymbol{e}}_r$ と直交するように a, b を求めてもよい[*26]。暗記するのではなく、これらの結果を導出できるようになっていることが重要である。

すると、単純計算より、2 次元極座標での基底ベクトルの微分が

$$\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_r}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_r}{\partial\theta} = \hat{\boldsymbol{e}}_\theta, \quad \frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial\theta} = -\hat{\boldsymbol{e}}_r \tag{1.91}$$

となることがわかる。

これらを用いると、微小変位ベクトルを 2 次元極座標であらわしたものは

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{r} &= d(r\hat{\boldsymbol{e}}_r) = (dr)\hat{\boldsymbol{e}}_r + r(d\hat{\boldsymbol{e}}_r) = (dr)\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\left(\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_r}{\partial r}dr + \frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_r}{\partial\theta}d\theta\right) \\ &= (dr)\hat{\boldsymbol{e}}_r + (rd\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \end{aligned} \tag{1.92}$$

[*26] $\hat{\boldsymbol{e}}_r \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = a\cos\theta + b\sin\theta = 0$ より、$a = -b\sin\theta/\cos\theta$ となるので、$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = -(b\sin\theta/\cos\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_x + b\hat{\boldsymbol{e}}_y$ となる。さらに規格化条件 $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_\theta = 1$ を用いると、$b = \pm\cos\theta$ となるので、$b = \cos\theta$ と選べば、(1.90) 式と同じ結果が得ることができる。ただし、2 乗して 1 になる自明の規格化因子の違いは出る可能性があるので、図を描いて求められるようになっておくことが望ましい。

となる。両辺を dt で割れば、速度ベクトルの表式

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \dot{r}\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{1.93}$$

を得る。

1.2.2: **関数 f の勾配ベクトル ∇f の変換**

2 次元デカルト座標における関数 $f(x,y)$ の勾配ベクトルは

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\boldsymbol{e}}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\boldsymbol{e}}_y \tag{1.94}$$

であり、ラプラシアンは

$$\nabla^2 f = \nabla\cdot(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{1.95}$$

である。2 次元極座標における関数 $f(r,\theta)$ の勾配ベクトルとラプラシアンを求めよ。

略解：内積が座標系によらないこと[*27]を用いると、勾配ベクトル ∇f と微小変位ベクトル $d\boldsymbol{r}$ との内積は座標系によらない。(1.15) 式より $df = d\boldsymbol{r}\cdot\nabla f$ であるから、**全微分 df は座標系によらないことがわかる**。

2 次元極座標での勾配ベクトルを

$$\nabla f = (\nabla f)_r\hat{\boldsymbol{e}}_r + (\nabla f)_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{1.97}$$

とおこう。$(\nabla f)_r$, $(\nabla f)_\theta$ の具体形を求めることが目的である。

全微分 df は極座標では

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta \tag{1.98}$$

である。一方、(1.92), (1.97) 式を用いて内積 $d\boldsymbol{r}\cdot\nabla f = df$ を極座標で計算すると、

$$df = d\boldsymbol{r}\cdot\nabla f = (dr\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + rd\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta)\cdot(\nabla f) = (\nabla f)_r dr + r(\nabla f)_\theta d\theta \tag{1.99}$$

これと (1.98) 式を比べると、

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \qquad (\nabla f)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \tag{1.100}$$

すなわち

$$\nabla f = \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = \left[\hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right] f \tag{1.101}$$

であることがわかる。つまり、∇ の作用は、2 次元極座標では

$$\nabla \to \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \tag{1.102}$$

となる[*28]。

[*27] 内積の幾何学的定義

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{1.96}$$

において、座標系を変えたらベクトルの長さが伸び縮みするといったことはありえない (長さの「表し方」は変わるが、幾何学的実体としての「長さ」は不変である)。同様に、座標系を変えたらベクトルのなす角度が増えたり減ったりすることもありえないので、内積は座標系に依らない。

[*28] 基底ベクトル $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ と微分演算子 ∂_i の順序に注意。微分演算子は $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ にはかからないのでこの順番にしておく。一方、微分演算子はその後ろにくるものすべてに作用する ((1.103) 式参照)。

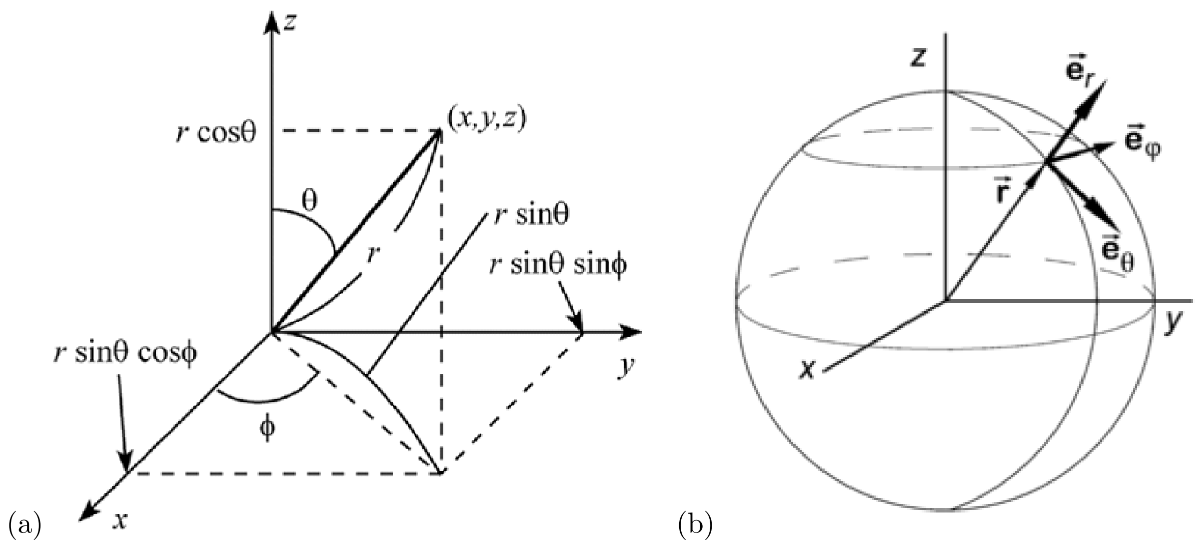

図 1.2 3 次元デカルト座標と 3 次元極座標の関係。左図ではフォントの関係で ϕ となっているが、これは本文中の φ のことである。

ベクトル場 $\boldsymbol{A} = A_r\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ の発散 (divergence) も、(1.102) 式を用いれば、

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \left(\hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\cdot(A_r\hat{\boldsymbol{e}}_r+A_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta)\\
&= \hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\frac{\partial(A_r\hat{\boldsymbol{e}}_r)}{\partial r}+\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\frac{\partial(A_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta)}{\partial r}+\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial(A_r\hat{\boldsymbol{e}}_r)}{\partial\theta}+\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial(A_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta)}{\partial\theta}\\
&\overset{(1.91)}{=} \frac{\partial A_r}{\partial r}+0+\frac{1}{r}A_r+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}
\end{aligned}\tag{1.103}$$

と求まる (計算せよ)。

さらに、関数 f へのラプラシアンの作用は、ベクトル場 ∇f の発散であるから、(1.103) 式を用いて計算すると、

$$\nabla^2 f = \nabla\cdot\nabla f = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]f \tag{1.104}$$

となる (途中式を含め計算せよ)。

演習問題 1.3: (加点問題) 3 次元の場合

演習問題 1.2 の議論を 3 次元の場合に拡張せよ。作図ができるようにしておいて外積さえ覚えておけば、自力で計算できる。

略解：作図すると分かるように (図 1.2(a) 参照)、極座標とデカルト座標の関係は、

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\qquad y = r\sin\theta\sin\varphi,\qquad z = r\cos\theta \tag{1.105}$$

である。$\boldsymbol{r} = r\hat{\boldsymbol{e}}_r = x\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + y\,\hat{\boldsymbol{e}}_y + z\,\hat{\boldsymbol{e}}_z$ より、r 方向の基底ベクトルは

$$\hat{\boldsymbol{e}}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{1.106}$$

である。x-y 平面に着目して作図すると分かるように、$\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ は 2 次元極座標の $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ と同様の関係があるから (図 1.2(a) 参照)、

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi = -\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \tag{1.107}$$

である。

$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ は作図から導くのは難しいが、図 1.2(b) から分かるように、$\hat{\boldsymbol{e}}_r$ と $\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ の両方に直交し、$\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$ から $\hat{\boldsymbol{e}}_r$ に向かって右ネジを回すと進む方向を向いているから、外積を用いて計算することができる[*29]。すなわち、

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta &= \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \times \hat{\boldsymbol{e}}_r = (-\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y) \times (\sin\theta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z) \\ &= \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \end{aligned} \tag{1.108}$$

である (外積の成分計算の公式ではなく、外積の分配法則と $\hat{\boldsymbol{e}}_x \times \hat{\boldsymbol{e}}_y = \hat{\boldsymbol{e}}_z,\ \hat{\boldsymbol{e}}_y \times \hat{\boldsymbol{e}}_z = \hat{\boldsymbol{e}}_x,\ \hat{\boldsymbol{e}}_z \times \hat{\boldsymbol{e}}_x = \hat{\boldsymbol{e}}_y,\ \hat{\boldsymbol{e}}_j \times \hat{\boldsymbol{e}}_i = -\hat{\boldsymbol{e}}_i \times \hat{\boldsymbol{e}}_j\ (i,j = x,y,z)$ を用いて計算すること[*30])。

あとは単純計算で、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_r}{\partial r} = 0, && \frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial r} = 0, && \frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi}{\partial r} = 0, \\
&\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_r}{\partial \theta} = \hat{\boldsymbol{e}}_\theta, && \frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{\boldsymbol{e}}_r, && \frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi}{\partial \theta} = 0, \\
&\frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_r}{\partial \varphi} = \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi, && \frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_\theta}{\partial \varphi} = \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi, && \frac{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_r - \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta
\end{aligned} \tag{1.110}$$

を示すことができる (計算する)。これらを用いると、

$$d\boldsymbol{r} = d(r\hat{\boldsymbol{e}}_r) = (dr)\hat{\mathbf{e}}_r + r(d\hat{\mathbf{e}}_r) = (dr)\hat{\mathbf{e}}_r + (rd\theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta + (r\sin\theta\,d\varphi)\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{1.111}$$

が得られる (式変形を含め計算すること)。dt で両辺を割れば、速度ベクトルが

$$\boldsymbol{v} = (\dot{r})\hat{\mathbf{e}}_r + (r\dot{\theta})\hat{\mathbf{e}}_\theta + (r\sin\theta\,\dot{\varphi})\hat{\mathbf{e}}_\varphi \tag{1.112}$$

のように求まる。

スカラー場の全微分が極座標では

$$df = (\nabla f)\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi \tag{1.113}$$

となるべきことから、

$$\nabla f = \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \tag{1.114}$$

である (示せ)。すなわち、

$$\nabla \to \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{e}}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{1.115}$$

である。

これを用いれば、ベクトル場の発散とスカラー場のラプラシアンも計算できる (計算せよ)。結果は、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\big(r^2A_r\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\big(\sin\theta A_\theta\big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi \tag{1.116}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \tag{1.117}$$

となる。

---

*29 ここの部分の説明がわからなかった場合には、必ず図書館等で調べて確認すること！

*30 基底ベクトルの外積 (幾何学的関係) が最も重要である。成分計算が外積だという考えは捨て去ること！これらを用いれば、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} &= (A^x\hat{\mathbf{e}}_x + A^y\hat{\mathbf{e}}_y + A^z\hat{\mathbf{e}}_z) \times (B^x\hat{\mathbf{e}}_x + B^y\hat{\mathbf{e}}_y + B^z\hat{\mathbf{e}}_z) \\ &= A^xB^y(\hat{\mathbf{e}}_x\times\hat{\mathbf{e}}_y) + A^xB^z(\hat{\mathbf{e}}_x\times\hat{\mathbf{e}}_z) + A^yB^x(\hat{\mathbf{e}}_y\times\hat{\mathbf{e}}_x) + A^yB^z(\hat{\mathbf{e}}_y\times\hat{\mathbf{e}}_z) + A^zB^x(\hat{\mathbf{e}}_z\times\hat{\mathbf{e}}_x) + A^zB^y(\hat{\mathbf{e}}_z\times\hat{\mathbf{e}}_y) \\ &= (A^xB^y - A^yB^x)(\hat{\mathbf{e}}_x\times\hat{\mathbf{e}}_y) + (A^yB^z - A^zB^y)(\hat{\mathbf{e}}_y\times\hat{\mathbf{e}}_z) + (A^zB^x - A^xB^z)(\hat{\mathbf{e}}_z\times\hat{\mathbf{e}}_x) \\ &= (A^xB^y - A^yB^x)\hat{\mathbf{e}}_z + (A^yB^z - A^zB^y)\hat{\mathbf{e}}_x + (A^zB^x - A^xB^z)\hat{\mathbf{e}}_y \end{aligned} \tag{1.109}$$

のように外積の成分の公式が得られる。ここで、2 番目の等号では外積の分配法則、および外積の性質 $\hat{\boldsymbol{e}}_j\times\hat{\boldsymbol{e}}_i = -\hat{\boldsymbol{e}}_i\times\hat{\boldsymbol{e}}_j$ において $i = j$ とすることで導かれる $\hat{\boldsymbol{e}}_i\times\hat{\boldsymbol{e}}_i = 0$ (平行なベクトルの外積は 0) を用いている。

演習問題 1.4: (重要) クロネッカーのデルタについて

1.4.1: クロネッカーのデルタに因る添字の置き換え

$A_i^j \delta_j^k = A_i^k$ を示せ。

1.4.2: 座標変換とクロネッカーのデルタ

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial X^j} = \delta^i_j \tag{1.118}$$

が成り立つことを示せ。

1.4.3: クロネッカーのデルタを用いた内積の表現

1. 下付きだけのクロネッカーのデルタ δ_{ij} を用いて $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ をあらわせ。
2. 上付きだけのクロネッカーのデルタ δ^{ij} を用いて (a) $\nabla^2 f$, (b)$[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})]_i$ をそれぞれ表わせ。

略解：

1. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_j B^j \overset{(1.80)}{=} \delta_{ij}A^i B^j$。このように、下付きだけのクロネッカーのデルタを用いて内積を表すことができる。ちなみに、上付きだけのクロネッカーのデルタを用いても $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \delta^{ij}A_i B_j$ のように内積を表すことができる。
2. (a) $\nabla^2 f = (\partial_x\partial_x + \partial_y\partial_y + \partial_z\partial_z)f = \delta^{ij}\partial_i\partial_j f$。偏微分は基本的に下付きであるが、上付きの偏微分を用いて $\nabla^2 f = (\partial^x\partial_x + \partial^y\partial_y + \partial^z\partial_z)f = \partial^j\partial_j f$ と形式的において、ここで (1.78) 式を用いて $\partial^j = \delta^{ij}\partial_i$ として、$\nabla^2 f = \delta^{ij}\partial_i\partial_j f$ と考えてもよい。
(b) $[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})]_i = \partial_i(\partial_j V^j) = \partial_i(\partial_j\delta^{jk}V_k)$。$\delta^{jk}$ の微分は 0 であることに注意して更に変形すれば、$[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})]_i = \partial_i(\delta^{jk}\partial_j V_k)$。ただし、$\delta^{jk}$ をさらに微分の外に出して $[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{V})]_i = \delta^{jk}\partial_i\partial_j V_k$ とすると、右辺が左辺を意味していることの見通しが悪くなる。

演習問題 1.5: 変換行列の計算

2 次元デカルト座標 x^i から 2 次元極座標 X^i への変換にあらわれる係数行列 $\Lambda^i_j \equiv \dfrac{\partial X^i}{\partial x^j}$ を求めよ。また、2 次元極座標から 2 次元デカルト座標への変換にあらわれる係数行列 $\Lambda'^j_k \equiv \dfrac{\partial x^j}{\partial x^k}$ を求めよ。この場合に (1.73) 式が成り立っていることを示せ。

略解：$r(x,y), \theta(x,y)$ の表式

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \tag{1.119}$$

の式の両辺の全微分を取ると、r については

$$dr = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \frac{x}{r}dx + \frac{y}{r}dy = \cos\theta dx + \sin\theta dy \tag{1.120}$$

これと $r(x,y)$ の全微分の表式

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy \tag{1.121}$$

を比べて、

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \tag{1.122}$$

同様に θ については

$$d(\tan\theta) = \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{r\cos\theta\, dy - r\sin\theta\, dx}{r^2\cos^2\theta} \tag{1.123}$$

より、

$$d\theta = -\frac{\sin\theta}{r}dx + \frac{\cos\theta}{r}dy \tag{1.124}$$

$\theta(x, y)$ の全微分の表式

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}dx + \frac{\partial\theta}{\partial y}dy \tag{1.125}$$

と比べて、

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r} \tag{1.126}$$

以上より、変換行列は、

$$\Lambda^i_j = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \tag{1.127}$$

であり、

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.128}$$

となっている。同様に、

$$\Lambda'^i_j = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -y \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \end{pmatrix} \tag{1.129}$$

であることが示せる。

行列 (1.127), (1.129) の積を計算すれば、(1.73) 式が成り立つことは容易に確かめられる。

演習問題 1.6: **偏微分についての考察**

ラグランジアン $L(x, \dot{x}, t)$ が変数変換で $L(y, \dot{y}, t)$ になった際には、まったく別の関数であるから、本来は L とは別の記号を用いて、例えば $M(y, \dot{y}, t)$ と書くべきである (数学ではそうしている場合が多い)*31。このように、本来は別の関数であるという事実を忘れると大きな間違いをしてしまう。それを以下の簡単な例で見てみよう。

関数 f を

$$f(x, y, z) = (x+y)^3z^2 + xz(x+y)^2 \tag{1.130}$$

とおく。これを x で偏微分せよ。次に $w = x + y$ として $f(x, w, z)$ をつくり x で偏微分せよ。結果を比べていろいろ考察せよ。

解説：偏微分の計算は各自で行うこと。

この簡単な例が示すように、偏微分では、引数あるいは、偏微分をとる際に止めておく変数、つまりは (偏) 微分の方向が明らかでないと*32、意味を持たない。物理学では違う変数の場合にも同じ関数記号を使うので、偏微分では引数を確認することがたいへん重要である。熱力学におけるその重要性は既に経験していると思う。

例えば、温度を一定にする操作なのか、それとも体積あるいは圧力を一定に保って操作を行うのか、断熱変化なのか、ということに依存して一般に結果が変わることが予想されるが (図 1.3 参照*33)、それを正しく記述す

---

*31 しかし、物理学では、加速度は a、ポテンシャルなら U, V、力なら F、ラグランジアンなら L というように、記号と物理量に強い結びつきがあり、そのおかげで理解が平易になっている場合も多いので、いちいち別の記号を使っていたのでは都合がわるい。そこで本講義でもこれを採用している。

*32 微分とは変化率であり、多次元の場合にはどちら方向の変化率を考えているのかが明らかでないと、という意味。

*33 図の出典：FN の高校物理 `http://fnorio.com/0103heat_engine(steam_cycle)1/heat_engine(steam_cycle)1.htm`

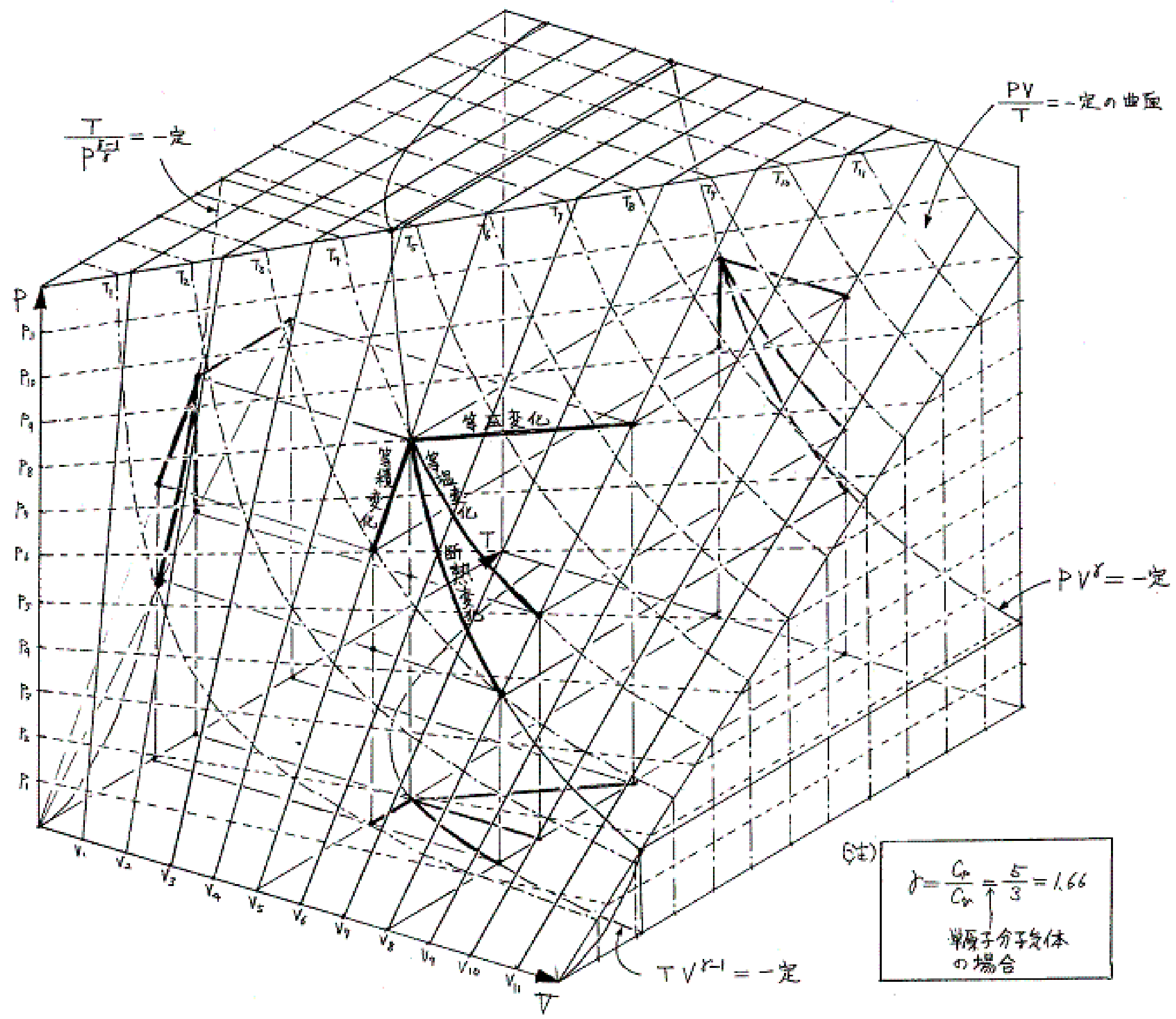

図 1.3 理想気体の状態方程式。理想気体の状態方程式 $PV = NRT$ ($N =$ 一定) を $f(P, V, T) = PV - NRT = 0$ とみなすと、$f = 0$ の条件により (P, V, T) 空間に 1 つの曲面が定まる。その曲面の概略図を示す。当然のことであるが、曲面の傾き (微分) は方向 (どのような変化を考えているのか) に依存する。この方向に依存した微分を考えるために必要な概念が「偏微分」とそれを拡張した「勾配」である。(図の出典：FN の高校物理)

るためには偏微分に対するしっかりとした知識が必要不可欠になる。すなわち、偏微分に対する一定程度の習熟なしでは、熱力学は理解できない。

偏微分の方向依存性は、幾何学的には円筒の表面の傾きを考えれば理解できるかもしれない。つまり、円周方向には曲がっているが、縦方向には曲がっていないので微分が異なるのである。このように、1 変数関数 (1 次元) では、微分をとる方向が決まっていたので簡単 (方向が決まっているので方向に依らないという意味でスカラー df/dx) であったが、多次元になると微分は方向に依存するのでベクトル ∇f になる[*34]。

例として、2 変数関数の場合の結果 (1.15) 式を見てみよう。これは、2 変数関数 $f(x, y)$ の微分 (勾配ベクトル) ∇f に対して、$d\boldsymbol{r} = (dx, dy)$ 方向への成分 (変化率) が $df = d\boldsymbol{r} \cdot \nabla f$ であるととらえることができる。$\hat{\boldsymbol{e}}_x$ との内積をとれば微分 ∇f の x 成分、すなわち x 方向の成分 (変化率) が得られ、その結果は $\hat{\boldsymbol{e}}_x \cdot \nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f$ である。

複素数 $z = x + iy$ も実数部分 x と虚数部分 y の 2 自由度あるため、実質的には (z とその複素共役 $z^* = x - iy$ の) 2 変数関数とみなせる複素関数の場合も、微分は一般に方向に依存するように思われる。ただし、複素関数論においては主役は z であり、z^* は副次的な変数にとどまっている。そのため、微分を z だけを用いてうまく

[*34] ベクトルと微分にも対応があるこの事実が、実は、これがベクトルのより深い幾何学的な定義と結びついている。

定義することで、通常の 2 変数関数とは違った、より不思議で豊かな世界が展開されることになる[*35]。

演習問題 1.7: (重要) 偏微分と全微分

多変数関数 f の全微分を考える。

1. $f=f(x,y,z)$ であるときその全微分を求めよ。
2. $f=f(x,y,z)$ において、$z=z(y,w)$ であるとする。f を $f(x,y,z)$ とみなしたときの偏微分と f を $f(x,y,z(y,w))=f(x,y,w)$ とみなしたときの偏微分の関係式を導け[*36]。
3. $f=f(x,y,z)$ において、$y=y(x,v)$, $z=z(x,y,w)$ であるとする。f を $f(x,y,z)$ とみなしたときの偏微分と f を $f(x,y(x,v),z(x,y(x,v),w))=f(x,v,w)$ とみなしたときの偏微分の関係式を導け。
4. $f=f(x,y,z)$ の曲面 $S:\ z=h(x,y)$ における全微分を求め、曲面 S 上における f の x,y 方向の偏微分を求めよ。
5. $f=f(x,y,z)$ の曲面 $\Sigma:\ g(x,y,z)=C=$ (定数) における全微分を求め、曲面 Σ 上における f の偏微分を求めよ。

略解：

1. $f=f(x,y,z)$ の全微分は
$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{1.131}$$
2. 1. の df に
$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_w dy+\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_y dw \tag{1.132}$$
を代入すれば、
$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}dx+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_w\right]dy+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_y dw \tag{1.133}$$
となる。ここで、偏微分の際に止めておく変数が明らかになるようにした。これと $f(x,y,w)$ とみなしたときの全微分
$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,w}dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,w}dy+\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{x,y}dw \tag{1.134}$$
を比較すると、偏微分の間の関係式
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,w}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,w}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_w \tag{1.135}$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)_{x,y}=\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_y \tag{1.136}$$
が得られる[*37]。

[*35] 複素関数論をより深く理解するための副読本として、山本直樹, 「複素関数論の基礎」, (裳華房) を薦める。

[*36] ここで、$f(x,y,z)$ と $f(x,y,w)$ は全く別の関数である。例えば、$f(x,y,z)=xyz$ のとき、一般に $f(x,y,w)=xyw$ ではない。実際、例えば $z(y,w)=y+w$ とすると、$f(x,y,w)=xyw+xy^2$ である。したがって、数学的には後者を $g(x,y,w)$ などのように表すべきであるが、物理学の慣習にならって同じ記号を用いて表していることに注意。この違いをしっかり把握していないと、熱力学は理解不能の代物になりかねない。

[*37] もう一度注意をしておく。左辺と右辺にあらわれる f はその引数が異なるので、具体的表式も異なる全く別の関数である。

3. 各自の演習問題として残しておく。$z = z(x, y, w)$ の全微分

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,w} dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,w} dy + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)_{x,y} dw \tag{1.137}$$

に表れる dy も $y = y(x, v)$ の全微分を用いて消去する必要があることに注意せよ。

4. 曲面 $z = h(x, y)$ 上では dz は自由に変化させることはできず、

$$dz = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \tag{1.138}$$

を満たす変化しか許されない。これを df に代入すれば、

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy\right) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial y}\right) dy \end{aligned} \tag{1.139}$$

これより、曲面 S に沿った f の偏微分は

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,S} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{y} \tag{1.140}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,S} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{x} \tag{1.141}$$

となる。

5. Σ 一定面では[*38]

$$0 = dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \tag{1.142}$$

である。$g(x, y, z) = C$ が $x = g_x(y, z)$ と解けたとすると、$\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$ となる点を除いて、

$$dx = -\frac{1}{\dfrac{\partial g}{\partial x}}\left(\frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz\right) = -\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz\right) \tag{1.143}$$

なので、

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial g}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial g}{\partial z}\right) dz \end{aligned} \tag{1.144}$$

となるから

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,\Sigma} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial g}{\partial y} \tag{1.145}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{y,\Sigma} = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial g}{\partial z} \tag{1.146}$$

である。

同様に、$\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ となる点を除いて

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{z,\Sigma} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial g}{\partial x} \tag{1.147}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,\Sigma} = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial g}{\partial z} \tag{1.148}$$

[*38] 以下では偏微分において止めておく添字を省略する。レポートではこれを補って解答すること。

$\dfrac{\partial g}{\partial z} = 0$ となる点を除いて

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,\Sigma} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1}\frac{\partial g}{\partial x} \tag{1.149}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,\Sigma} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^{-1}\frac{\partial g}{\partial y} \tag{1.150}$$

を得る。

第 2 章

ハミルトンの原理とオイラー・ラグランジュ方程式 (2): 多次元の場合

2.1 多次元の場合のオイラーラグランジュ方程式

空間多次元の場合のラグランジアンを一般に

$$L = L(q^i, \dot{q}^i, t) \tag{2.1}$$

と表す。例えば 3 次元の場合には、

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = L(q^i, \dot{q}^i, t) \tag{2.2}$$

のようにまとめて表したことになる。

出席課題 S.2.1 : 多変数の全微分の公式を用いて、$f(x, y) = f(x(t), y(t))$ の場合の全微分の公式

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}\right] dt \tag{2.3}$$

を示せ。

略解 2 変数の全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{2.4}$$

に

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = \dot{x}dt, \qquad dy = \frac{dy}{dt}dt = \dot{y}dt \tag{2.5}$$

を代入すればよい。

出席課題 S.2.2 : 多変数の全微分の公式を用いて、$f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v))$ の場合に、du, dv に関しての全微分の公式を導け。さらに、偏微分のチェインルール

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{2.7}$$

を導け。

略解　$f(x, y)$ の全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

に $x(u, v)$, $y(u, v)$ の全微分

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv \tag{2.8}$$

を代入すると、

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right]du + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right]dv \tag{2.9}$$

これが全微分の式である。次に (u, v) の関数とみなして f の全微分を計算すると[*1]

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv \tag{2.10}$$

(2.9) 式と比べれば偏微分のチェインルールが得られる。

出席課題 S.2.3：　多変数の全微分の公式を用いて、$f(x^i) = f(x^i(y^k))$ の場合に、dy^k に関しての全微分の公式と偏微分のチェインルールを導け。さらに、$f(x^i) = f(x^i(y^k(z^l))$ の場合に、dz^l に関しての全微分の公式と偏微分のチェインルールを導け。

略解　アインシュタインの和の規約を用いれば、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i \tag{2.11}$$

ここで[*2]、$dx^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial y^k}dy^k$ を代入すれば、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}dy^k \tag{2.12}$$

を得る。これと直接 dy^k での全微分を取った $df = \dfrac{\partial f}{\partial y^k}dy^k$ を比べれば、2 変数間の偏微分のチェインルール

$$\frac{\partial f}{\partial y^k} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \tag{2.13}$$

が得られる。さらに、$y^k = y^k(z^l)$ であるとき、$dy^k = \dfrac{\partial y^k}{\partial z^l}dz^l$ を (2.12) 式に代入すれば、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial z^l}dz^l \tag{2.14}$$

となるが、直接 dz^l での全微分を取った $df = \dfrac{\partial f}{\partial z^l}dz^l$ と比べれば、3 変数間の偏微分のチェインルール

$$\frac{\partial f}{\partial z^l} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial z^l} \tag{2.15}$$

を得る。同様にして、4 変数以上の場合への拡張の仕方も容易に理解できるであろう。

[*1] $f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v)) = f(u, v)$ とみなしている。
[*2] $df = (\partial f/\partial y^k)dy^k$ で $f = x^i$ と考える。

2.1.1 アインシュタインの和の規約を用いた導出

アインシュタインの和の規約を用いて、多次元の場合のオイラーラグランジュ方程式をハミルトンの原理から導こう。作用の変分をとれば*3、

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta \dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t = \frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta \dot{q}^k \tag{2.16}$$

ここで、1.3.3 節で注意したように、**分母にある上付き添字は下付きとみなすので、アインシュタインの和の規約が適用される**。また、今考えている変分では時間は動かさないので $\delta t = 0$ である。

(2.16) 式を 1 次元の場合の (1.22) 式と比べると、添字がついただけで同じ形をしていることが分かる。このように、添字にさえ注意すれば、1 変数の場合と同じように計算を進められるようになるのもアインシュタインの和の規約を用いる利点である。

作用の変分は

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \, dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \, \left[\frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta \dot{q}^k \right] \tag{2.17}$$

であるが、

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [\, L \text{ に関する何らかの関係式} \,] \, \delta q^k \, dt \tag{2.18}$$

の形にするために、(2.17) 式の積分の中の第 2 項を部分積分する：

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \left[\frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta q^k \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right)\delta q^k \right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \left[\frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right)\delta q^k \right] + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta q^k \right]_{t_1}^{t_2} \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \, \left[\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) \right] \delta q^k
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ここで、変分において端点が固定されている条件 $\delta q^k(t_1) = \delta q^k(t_2) = 0$ を用いた*4。

ハミルトンの原理により、任意の変分について $\delta S = 0$ が成り立つとして、多次元の場合のオイラーラグランジュ方程式

多次元の場合のオイラーラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) = 0 \tag{2.20}$$

が得られる。例えば $q^i = (x, y, z)$ のデカルト座標の場合には、(2.20) 式は

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) &= 0
\end{aligned} \tag{2.21}$$

*3 (1.23) 式のところで説明したように、変分は基本的に全微分と同じ演算とみなして計算ができる。

*4 アインシュタインの和の規約を用いたおかげで、(2.19) 式の導出過程は、添字がついただけで 1 変数の場合と同じであることに注意しよう。

の 3 本の方程式を意味する。

出席課題 S.2.4： 2 次元デカルト座標の場合に、アインシュタインの和の規約を用いないでオイラーラグランジュ方程式を導出し、得られた結果がアインシュタインの和の規約を用いたものと一致することを示せ。

略解 ラグランジアン $L = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$ の変分をとると、

$$\delta L = \left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}\right] + \left[\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}\right] \tag{2.22}$$

作用の変分は

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}\right] + \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\delta \dot{y}\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]\delta x + \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right]\delta y\end{aligned} \tag{2.23}$$

任意の変分 δx, δy について $\delta S = 0$ となるためには、

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \tag{2.24}$$

この結果は (2.20) 式の 2 次元デカルト座標の場合と一致している。

2.1.2 ニュートンの運動方程式の導出

3 次元デカルト座標の場合に、オイラーラグランジュ方程式からニュートンの運動方程式を導出しよう。$q^i = (x, y, z)$ として、ラグランジアンは

$$L(q^i, \dot{q}^i, t) = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}|^2 - U(q^i, t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(q^i, t) \tag{2.25}$$

である。(2.21) 式に代入すれば、

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{2.26}$$

が得られ、これをまとめれば運動方程式

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -\nabla U \tag{2.27}$$

が得られる。

2.2 オイラー・ラグランジュ方程式の共変性

確かにオイラーラグランジュ方程式からニュートンの第 2 法則が得られることが分かった。本節ではオイラーラグランジュ方程式が座標系によらないという利点[*5]を持つことを示そう。

[*5] その他にも多くの利点があるが、特に重要なのは、(1) 対称性と保存則の関係が組み込まれること (2 章)、(2) 束縛条件の取扱いが簡単になること、(3) 場の理論もハミルトンの原理から導けること (ニュートン力学から場の理論に移行するのは困難)、(4) 対称性からラグランジアンを予測し基礎方程式を類推できること、があげられる。

2.2.1 オイラーラグランジュ方程式の共変性の数学的表現

オイラー・ラグランジュ方程式を

$$D_k^{EL} L \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} \right] L = 0 \tag{2.28}$$

と表す。D_k^{EL} をオイラー・ラグランジュ微分と呼ぶ。以下では説明のために 2 次元を想定して議論をすすめるが、アインシュタインの和の規約を用いているので、一般の N 次元の場合にもそのまま成り立つ。

さて、x^i から X^i への座標変換で、$L(x^i, \dot{x}^i, t)$ が $L'(X^i, \dot{X}^i, t)$ になったとする。ここで $'$ は微分ではなく、L と L' が別の関数であることを示すものである。例えば、2 次元デカルト座標 $x^i = (x^1, x^2) = (x, y)$ から 2 次元極座標 $X^i = (X^1, X^2) = (r, \theta)$ への座標変換の場合には、

$$\begin{aligned} L(x^i, \dot{x}^i, t) &= L(x^1, x^2, \dot{x}^1, \dot{x}^2, t) = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) \\ L'(X^i, \dot{X}^i, t) &= L'(X^1, X^2, \dot{X}^1, \dot{X}^2, t) = L'(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}, t) \end{aligned}$$

である[*6]。

ここで、もしオイラー・ラグランジュ方程式が、x^i から X^i の座標変換によって、

$$\begin{aligned} D_k'^{EL} L' \equiv \left[\frac{\partial}{\partial X^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{X}^k} \right] L' &= \sum_{i=1}^{2} \Lambda_k^i \left[\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \right] L \\ &= \Lambda_k^i \left[\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \right] L = \Lambda_k^i D_i^{EL} L \end{aligned} \tag{2.29}$$

のような変換を受けるのであれば、$D_k^{EL} L = 0$ が成り立てば $D_k'^{EL} L' = 0$ も成り立つので、方程式は座標系に依らないことになる[*7]

2.2.2 オイラーラグランジュ方程式の共変性の証明

(2.29) 式の関係性が成り立つことを具体的に示す。念のために座標変換をあらわに書き下しておく[*8]：

$$x^k = x^k(X^1, X^2) = x^k(X^i) \tag{2.30}$$

$$X^k = X^k(x^1, x^2) = X^k(x^i) \tag{2.31}$$

[*6] 一般に L と L' はまったく別の関数であるが物理ではしばしば、同じ記号 L で書いて「同じ文字を使っているけど引数が違うから違う関数だということは分かるよね」とされることが多いので注意が必要。

[*7] ここで、Λ_k^i は $k \times k$ (今の例の場合には 2×2 の行列) であるが、その正体は最後に明らかになる。ここでは「(2.29) 式の関係性が示されれば、$D_k^{EL} L = 0$ が成り立てば $D_k'^{EL} L' = 0$ も成り立つ」ということが理解できていればよい。

[*8] 例えば、2 次元平面座標 $x^i = (x, y)$ から 2 次元極座標 $X^i = (r, \theta)$ への変換では $x^1 = x = r\cos\theta,\ x^2 = y = r\sin\theta$ である。これより、x^1 は $(r, \theta) = X^i$ の関数なので、$x^1 = x^1(r, \theta) = x^1(X^i)$ と表される。同様に $x^2(r, \theta) = x^2(X^i)$ と表せる。両者をまとめると $x^i = x^i(X^k)$ とかけることが理解できる。ここで $x^i = x^i(X^i)$ としなかったのは、この場合には $x^1 = x^1(X^1) = x(r)$, $x^2 = x^2(X^2) = y(\theta)$ という意味になってしまうためである。すなわち、引数 X^k の添字は x^i の添字と別物でなければならない。

基本方針

$L'(X^i, \dot{X}^i, t) = L(x^j, \dot{x}^j, t)$ の両辺を X^k, $\dot{X}^k$ で偏微分すると、

$$\frac{\partial L'}{\partial X^k} = \frac{\partial x^j}{\partial X^k}\frac{\partial L}{\partial x^j} + \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial X^k}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{X}^k} = \frac{\partial x^j}{\partial \dot{X}^k}\frac{\partial L}{\partial x^j} + \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{X}^k}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} \tag{2.33}$$

である。これをオイラーラグランジュ方程式 $D'^{EL}_k L'$ に代入し、うまく変形して (2.29) 式が成り立つように持っていきたい。そのために係数行列[*9]

$$\frac{\partial x^j}{\partial X^k}, \quad \frac{\partial x^j}{\partial \dot{X}^k}, \quad \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial X^k}, \quad \frac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{X}^k} \tag{2.34}$$

について調べる。

係数行列

まず、座標変換は速度に依らないので、

$$\frac{\partial x^j}{\partial \dot{X}^k} = 0 \tag{2.35}$$

であることが言える。

次に、$\partial x^j / \partial X^k$ は全微分

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial X^k} dX^k \tag{2.36}$$

にあらわれる係数行列である。両辺 dt で割れば、

$$\dot{x}^j = \frac{\partial x^j}{\partial X^k}\dot{X}^k = \frac{\partial x^j}{\partial X^i}\dot{X}^i \tag{2.37}$$

が得られる。

$\partial \dot{x}^j / \partial X^k$ は (2.37) 式を X^k で偏微分することで得られる：

$$\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial X^k} = \frac{\partial}{\partial X^k}\left(\frac{\partial x^j}{\partial X^i}\dot{X}^i\right) = \frac{\partial^2 x^j}{\partial X^k \partial X^i}\dot{X}^i + \frac{\partial x^j}{\partial X^i}\frac{\partial \dot{X}^i}{\partial X^k} \tag{2.38}$$

ここで、ラグランジアンの引数が $L(X^i, \dot{X}^i, t)$ となっていることから分かるように、X^i と $\dot{X}^i$ は独立変数として扱っているから、お互いの偏微分はゼロである[*10]：

$$\frac{d\dot{X}^i}{dX^k} = 0 \tag{2.39}$$

よって、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial X^k} &= \frac{\partial^2 x^j}{\partial X^k \partial X^i}\dot{X}^i = \frac{\partial}{\partial X^i}\left(\frac{\partial x^j}{\partial X^k}\right)\frac{dX^i}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^j}{\partial X^k}\right)\end{aligned} \tag{2.40}$$

[*9] (2.32), (2.33) 式の係数 $\partial x^j/\partial X^k$ 等は添字を 2 つ持つことから、数学的には行列と同一視することができる。

[*10] それぞれ時間の関数 $X^i(t)$, $\dot{X}^i(t)$ であるから、時間を介した依存性はある。単位円の方程式 $0 = f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ において、$x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ のように θ を介して互いに依存性はあるが、x, y についてお互いの偏微分はゼロであることと事情は同じである。

これは、時間微分と偏微分が交換可能であることを示している。

最後に、$\partial\dot{x}^j/\partial\dot{X}^k$ は (2.37) 式を $\dot{X}^k$ で偏微分することで得られる：

$$\frac{\partial\dot{x}^j}{\partial\dot{X}^k} = \frac{\partial x^j}{\partial X^i}\frac{\partial\dot{X}^i}{\partial\dot{X}^k} = \frac{\partial x^j}{\partial X^i}\delta^i_k = \frac{\partial x^j}{\partial X^k} \tag{2.41}$$

(2.35), (2.40), (2.41) 式より、すべての係数行列が $\partial x^j/\partial X^k$ を用いて表せたことになる*11。これらの結果を用いれば、(2.32), (2.33) 式は

$$\frac{\partial L'}{\partial X^k} = \frac{\partial x^j}{\partial X^k}\frac{\partial L}{\partial x^j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^j}{\partial X^k}\right)\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^j} \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial\dot{X}^k} = \frac{\partial x^j}{\partial X^k}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^j} \tag{2.43}$$

オイラーラグランジュ微分の変換

(2.43) 式より、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial\dot{X}^k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^j}{\partial X^k}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^j}{\partial X^k}\right)\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^j} + \frac{\partial x^j}{\partial X^k}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^j}\right) \tag{2.44}$$

が得られる。(2.42), (2.44) 式より、オイラーラグランジュ微分の変換は、

オイラー・ラグランジュ微分の共変性

$$D'^{EL}_k L' = \left[\frac{\partial}{\partial X^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{X}^k}\right]L' = \frac{\partial x^j}{\partial X^k}\left[\frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{x}^j}\right]L = \frac{\partial x^j}{\partial X^k}D^{EL}_j L \tag{2.45}$$

となることが示される。すなわち、(2.29) 式で導入された Λ^i_k は

$$\Lambda^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial X^k} \tag{2.46}$$

である。この結果より、ある座標系で運動方程式が成り立てば ($D^{EL}_j L = 0$)、別の座標系でも成り立つ ($D'^{EL}_j L' = 0$) ことが分かる。これを**オイラー・ラグランジュ方程式の共変性**と呼ぶ*12。

(**重要**) これ以降、物理学の慣習に従って、特に混乱のおそれのない限り、引数の違いから関数も本当は違うということを判断して、$L'(X^i, \dot{X}^i, t) = L(X^i, \dot{X}^i, t)$ とダッシュを外して書くことにする。

2.2.3　補足事項: 座標変換に伴う速度の変換則

(2.37) 式は座標変換に伴う速度の変換則を与える。この両辺に $\partial X^k/x^j$ を作用させると、

$$\frac{\partial X^k}{\partial x^j}\dot{x}^j = \frac{\partial X^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial X^i}\dot{X}^i \overset{(1.73)}{=} \delta^k_i\dot{X}^i = \dot{X}^k \tag{2.47}$$

を得る。これより、座標変換 $X^k = X^k(x^i)$ による速度成分の変換則は、

$$V^k \equiv \dot{X}^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^j}\dot{x}^j \equiv \frac{\partial X^k}{\partial x^j}\dot{v}^j \tag{2.48}$$

で与えられることが分かる。

*11 (2.35) 式はゼロであることを示すものであるが。

*12 オイラー・ラグランジュ方程式の共変性の具体例を演習問題 2.2 で取り上げる。

出席課題 S.2.5 : (2.40) 式を示せ。

略解 X^i の関数 $f(X^i)$ を時間で微分すると、

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial X^i}\frac{dX^i}{dt} \tag{2.49}$$

である。ここで f として $\partial x^j/\partial X^k$ を選べば (2.40) 式の最後の変形が示される。

出席課題 S.2.6 : (2.41) 式の計算は省略された部分を含む不完全なものである。これを補って完全な式変形を示せ。

略解 (2.41) 式の計算では

$$\frac{\partial \dot{x}^j}{\partial \dot{X}^k} = \frac{\partial x^j}{\partial X^i}\frac{\partial \dot{X}^i}{\partial \dot{X}^k} + \frac{\partial}{\partial \dot{X}^k}\left(\frac{\partial x^j}{\partial X^i}\right)\dot{X}^i \tag{2.50}$$

の右辺第 2 項が省略されている。しかし、偏微分の交換可能性を用いると、x^i が $\dot{X}^k$ によらないことから、

$$\frac{\partial}{\partial \dot{X}^k}\left(\frac{\partial x^j}{\partial X^i}\right) = \frac{\partial^2 x^j}{\partial \dot{X}^k \partial X^i} = \frac{\partial}{\partial X^i}\left(\frac{\partial x^j}{\partial \dot{X}^k}\right) = 0 \tag{2.51}$$

となる。このように結果には寄与しないことを見越して (2.41) 式の計算が行われていた。

2.3 レビチビタ (Levi-Civita) 記号

空間 3 次元の場合を考える。クロネッカーのデルタと並んで重要なレビチビタ (Levi-Civita) 記号を

レビチビタ (Levi-Civita) 記号

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk\text{ が }123\text{ の偶置換}) \\ -1 & (ijk\text{ が }123\text{ の奇置換}) \end{cases} \tag{2.52}$$

で定義する。ここで ijk が 123 の偶置換であるとは、**隣合う**数字の偶数回の交換で $123 \to ijk$ とできるということである。例えば 321 は 123 の偶置換、132 は奇置換である。

2.3.1 Levi-Civita 記号の性質

Levi-Civita 記号を用いた演算は重要なものがたくさんあるが、ここでは最も基本的な性質として以下のものを挙げておく。

反対称性に関する性質

1. ϵ_{ijk} の**隣り合う添字**を入れ替える度に符号が変わる。すなわち

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{kji} = \epsilon_{jki} = -\epsilon_{jik} \tag{2.53}$$

   である。
2. ϵ_{ijk} の添字の少なくとも 2 つが同じ場合には $\epsilon_{ijk} = 0$ である。
3. $\epsilon_{ijk}A^j A^k = 0$ である。
4. $B^{ij} = B^{ji}$ であるとき (B^{ij} が対称であるとき)、$\epsilon_{ijk}B^{jk} = 0$ である。

証明：

1. 隣り合う添字の入れ替えは置換の定義そのものである。したがって Levi-Civita 記号の定義から、1 と -1 を行ったり来たりする。これは置換の度に符号を変えることと同義である。

2. $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ において、$i = j$ とすると、$\epsilon_{iik} = -\epsilon_{iik}$ よって $2\epsilon_{iik} = 0$。他の添字が同じ場合にも同様にしてゼロになることが示せる。
3. A^j と A^k の順番は入れ替えられるから $\epsilon_{ijk}A^jA^k = \epsilon_{ijk}A^kA^j$. Levi-Civita 記号の反対称性より $\epsilon_{ijk}A^kA^j = -\epsilon_{ikj}A^kA^j$.

   ここで、アインシュタインの和の規約のおける添字の書き換え操作を行うと、右辺は、$-\epsilon_{ikj}A^kA^j \overset{*}{=} -\epsilon_{ilm}A^lA^m = -\epsilon_{ijk}A^jA^k$. と書き換えられる。

   念のために注意しておくと、これは添字 j と k を入れ替える操作ではなく、添字の書き換えである。次章以降ではほとんど説明なしに使われる計算であるので。$*$ のついた等号の計算は頭の中で実行して、左辺から右辺に変形できるようになってほしい。

   以上より、$\epsilon_{ijk}A^jA^k = -\epsilon_{ijk}A^jA^k$. よって $2\epsilon_{ijk}A^jA^k = 0$.
4. 前問と全く同様にして証明できる。B^{ij} の対称性より、$\epsilon_{ijk}B^{jk} = \epsilon_{ijk}B^{kj}$. Levi-Civita 記号の反対称性より $\epsilon_{ijk}B^{kj} = -\epsilon_{ikj}B^{kj}$. アインシュタインの和の規約のおける添字の書き換え操作より $-\epsilon_{ikj}B^{kj} = -\epsilon_{ijk}B^{jk}$. 以上より $\epsilon_{ijk}B^{jk} = -\epsilon_{ijk}B^{jk}$. よって $2\epsilon_{ijk}B^{jk} = 0$.

   上記の証明と同様にして、添字の入れ替えについて反対称の $A^{ji} = -A^{ij}$ と対称の B^{ij} に対し、

$$A^{ij}B_{ij} = 0 \tag{2.54}$$

   が常に成り立つ。

出席課題 S.2.7 : Levi-Civita 記号の反対称性に関する性質 1.～4. を証明せよ。

2.3.2 Levi-Civita 記号によるベクトルの外積の表現

Levi-Civita 記号を用いると、デカルト座標におけるベクトルの外積の成分を次のように表すことができる。

Levi-Civita 記号によるベクトルの外積の表現

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_i = \epsilon_{ijk}A^jB^k \tag{2.55}$$

証明：ベクトルの外積の z 成分は

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_z = A^xA^y - A^yA^x \tag{2.56}$$

である。

$\epsilon_{123} = \epsilon_{xyz}$ とする。ϵ_{ijk} の添字の少なくとも 2 つが同じ場合にはゼロになるから、

$$\epsilon_{zjk}A^jB^k = \epsilon_{zxy}A^xB^y + \epsilon_{zyx}A^yB^x \tag{2.57}$$

である。クロネッカーのデルタの定義より、$\epsilon_{zxy} = \epsilon_{312} = 1$, $\epsilon_{321} = -1$. よって、

$$\epsilon_{zjk}A^jB^k = A^xB^y - A^yB^x \tag{2.58}$$

これはベクトルの外積の z 成分と一致する。同様にしてベクトルの外積の x 成分, y 成分についても (2.55) 式が成り立つことを示すことができる。

同様に、デカルト座標におけるベクトルの回転の成分も Levi-Civita 記号を用いて表せる。

Levi-Civita 記号によるベクトルの回転の表現

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})^i = \epsilon^{ijk}\partial_j B_k \tag{2.59}$$

ここで、偏微分はなるべく下付きで表しておいたほうがよいので、添字の付け方を (2.55) 式とは意図的に変えてある。

ベクトル解析への応用

この結果を用いれば、ベクトルの回転の発散がゼロになるというベクトル解析の公式

ベクトル解析の公式: 回転の発散はゼロ

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{2.60}$$

を簡単に示すことができる。

証明： デカルト座標で証明する。(2.60) 式の左辺は

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \partial_i(\epsilon^{ijk}\partial_j A_k) \tag{2.61}$$

と表せる。Levi-Civita 記号は定数であるから微分の外に出すことができるので、

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \epsilon^{ijk}\partial_i\partial_j A_k \tag{2.62}$$

偏微分は交換できるので、

$$\epsilon^{ijk}\partial_i\partial_j A_k = \epsilon^{ijk}\partial_j\partial_i A_k \tag{2.63}$$

右辺において $\epsilon^{ijk} = -\epsilon^{jik}$ より

$$\epsilon^{ijk}\partial_i\partial_j A_k = -\epsilon^{jik}\partial_j\partial_i A_k \tag{2.64}$$

右辺において添字の書き換えより[*13]

$$-\epsilon^{jik}\partial_j\partial_i A_k \overset{\substack{j \to l \\ i \to m}}{=} -\epsilon^{lmk}\partial_l\partial_m A_k \overset{\substack{l \to i \\ m \to j}}{=} -\epsilon^{ijk}\partial_i\partial_j A_k \tag{2.65}$$

よって

$$2\epsilon^{ijk}\partial_i\partial_j A_k = 0 \tag{2.66}$$

すなわち (2.60) 式が成り立つ[*14]。

同様にして、任意のスカラー場 f の勾配の回転がゼロになるというベクトル解析の公式を示すことができる (演習問題 2.5.2)。

ベクトル解析の公式: 勾配の回転はゼロ

$$\nabla \times \nabla f = 0 \tag{2.67}$$

出席課題 S.2.8： (1) $\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \nabla C)$, (2) $\left[\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})\right]_i$, (3) $\left[(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C}\right]_i$ をアインシュタインの規約を用いて表せ。

[*13] ここで注意しておくと、以下の式変形は添字 i と j の交換ではない。和が取られている添字 i と j の書き換えである。そのことが明らかになるように式変形を加えておいたが、実際の計算ではこれを省略できるようになること。もう一度だけ注意しておく。この式変形は添字 i と j の交換ではない！

[*14] このような詳しい式変形の解説はこれ以降は行わない。各自必ずここで納得して「独力で計算」できるようになっておくこと！

略解　(1) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\nabla C) = A_i\epsilon^{ijk}B_j\partial_k C$.

(2) $\boldsymbol{D}\equiv\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ とおくと、$\left[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right]_i = \left[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D}\right]_i = \epsilon_{ijk}A^jD^k$. ここで、$D^k = \left[\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right]^k = \epsilon^{klm}B^lC^m$ を代入すれば[*15]、

$$\left[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right]_i = \epsilon_{ijk}\epsilon^{klm}A^jB_lC_m \tag{2.68}$$

(3) 各自の演習問題とする。結果は次のようになるはずである。

$$\left[(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}\right]_i = \epsilon_{ijk}\epsilon^{jlm}A_lB_mC^k \tag{2.69}$$

出席課題 S.2.9：　ベクトルの外積の x 成分についても (2.55) 式が成り立つことを示せ。

2.3.3　Levi-Civita 記号の重要公式とベクトル解析

Levi-Civita 記号について、次の公式は覚えておくに値する。この公式を用いると、ベクトル解析の多くの公式を容易に証明することができる。

Levi-Civita 記号の重要公式

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ilm} = \delta^l_j\delta^m_k - \delta^m_j\delta^l_k \tag{2.70}$$

証明： アインシュタインの和の規約より、(2.70) 式の左辺は

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ilm} = \epsilon_{1jk}\epsilon^{1lm} + \epsilon_{2jk}\epsilon^{2lm} + \epsilon_{3jk}\epsilon^{3lm}. \tag{2.71}$$

ここで、Levi-Civita 記号 ϵ_{1jk} が、クロネッカーのデルタを用いて

$$\epsilon_{1jk} = \delta^2_j\delta^3_k - \delta^2_k\delta^3_j \tag{2.72}$$

と表せることに注意する[*16]。ϵ_{2jk}, ϵ_{3jk} についても、

$$\epsilon_{2jk} = \delta^3_j\delta^1_k - \delta^3_k\delta^1_j, \qquad \epsilon_{3jk} = \delta^1_j\delta^2_k - \delta^1_k\delta^2_j \tag{2.73}$$

となることが示せる。同様に、

$$\epsilon^{1lm} = \delta^l_2\delta^m_3 - \delta^m_2\delta^l_3, \quad \epsilon^{2lm} = \delta^l_3\delta^m_1 - \delta^m_3\delta^l_1, \quad \epsilon^{3lm} = \delta^l_1\delta^m_2 - \delta^m_1\delta^l_2 \tag{2.74}$$

[*15] D^k を表す際に添字 i, j を用いて $D^k = \epsilon^{kij}B^iC^j$ とするのは賢いやり方ではない。なぜならば、代入先の $\epsilon_{ijk}A^jD^k$ で添字 i, j が用いられているので、添字の競合が起こるからである。

[*16] ∵両辺とも $(j,k) = (2,3), (3,2)$ 以外はゼロであり、$(j,k) = (2,3)$ の場合、(2.72) 式の左辺は $\epsilon_{123} = 1$、右辺は $\delta^2_2\delta^3_3 - \delta^2_3\delta^3_2 = 1$ で一致する。$(j,k) = (3,2)$ の場合にも、(2.72) 式の左辺は $\epsilon_{132} = -1$、右辺は $\delta^2_3\delta^3_2 - \delta^2_2\delta^3_3 = -1$ となり一致する。よってすべての (k,j) について両辺が等しいので (2.72) 式が成り立つ。

である。(2.72)–(2.74) 式を (2.71) 式に代入すると、

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\epsilon^{ilm} &= \delta_j^2\delta_k^3\delta_2^l\delta_3^m + \delta_j^3\delta_k^2\delta_3^l\delta_2^m - \delta_j^2\delta_k^3\delta_3^l\delta_2^m - \delta_j^3\delta_k^2\delta_2^l\delta_3^m \\
&\quad + \delta_j^3\delta_k^1\delta_3^l\delta_1^m + \delta_j^1\delta_k^3\delta_1^l\delta_3^m - \delta_j^3\delta_k^1\delta_1^l\delta_3^m - \delta_j^1\delta_k^3\delta_3^l\delta_1^m \\
&\quad + \delta_j^1\delta_k^2\delta_1^l\delta_2^m + \delta_j^2\delta_k^1\delta_2^l\delta_1^m - \delta_j^1\delta_k^2\delta_2^l\delta_1^m - \delta_j^2\delta_k^1\delta_1^l\delta_2^m \\
&= \delta_k^1\delta_1^m(\delta_j^2\delta_2^l + \delta_j^3\delta_3^l) + \delta_k^2\delta_2^m(\delta_j^3\delta_3^l + \delta_j^1\delta_1^l) + \delta_k^3\delta_3^m(\delta_j^1\delta_1^l + \delta_j^2\delta_2^l) \\
&\quad - \delta_k^1\delta_1^l\,(\delta_j^2\delta_2^m + \delta_j^3\delta_3^m) - \delta_k^2\delta_2^l\,(\delta_j^3\delta_3^m + \delta_j^1\delta_1^m) - \delta_k^3\delta_3^l\,(\delta_j^1\delta_1^m + \delta_j^2\delta_2^m) \\
&= \delta_k^1\delta_1^m(\delta_j^2\delta_2^l + \delta_j^3\delta_3^l + \delta_j^1\delta_1^l) + \delta_k^2\delta_2^m(\delta_j^3\delta_3^l + \delta_j^1\delta_1^l + \delta_j^2\delta_2^l) + \delta_k^3\delta_3^m(\delta_j^1\delta_1^l + \delta_j^2\delta_2^l + \delta_j^3\delta_3^l) \\
&\quad - \delta_k^1\delta_1^l\,(\delta_j^2\delta_2^m + \delta_j^3\delta_3^m + \delta_j^1\delta_1^m) - \delta_k^2\delta_2^l\,(\delta_j^3\delta_3^m + \delta_j^1\delta_1^m + \delta_j^2\delta_2^m) - \delta_k^3\delta_3^l\,(\delta_j^1\delta_1^m + \delta_j^2\delta_2^m + \delta_j^3\delta_3^m) \\
&= \delta_k^1\delta_1^m(\delta_j^i\delta_i^l) + \delta_k^2\delta_2^m(\delta_j^i\delta_i^l) + \delta_k^3\delta_3^m(\delta_j^i\delta_i^l) \\
&\quad - \delta_k^1\delta_1^l(\delta_j^i\delta_i^m) - \delta_k^2\delta_2^l(\delta_j^i\delta_i^m) - \delta_k^3\delta_3^l(\delta_j^i\delta_i^m) \\
&\overset{(1.62)}{=} \left(\delta_k^1\delta_1^m\delta_j^l + \delta_k^2\delta_2^m\delta_j^l + \delta_k^3\delta_3^m\delta_j^l\right) - \left(\delta_k^1\delta_1^l\delta_j^m + \delta_k^2\delta_2^l\delta_j^m + \delta_k^3\delta_3^l\delta_j^m\right) \\
&= \delta_j^l\left(\delta_k^1\delta_1^m + \delta_k^2\delta_2^m + \delta_k^3\delta_3^m\right) - \delta_j^m\left(\delta_k^1\delta_1^l + \delta_k^2\delta_2^l + \delta_k^3\delta_3^l\right) \\
&= \delta_j^l\delta_k^i\delta_i^m - \delta_j^m\delta_k^i\delta_i^l \\
&\overset{(1.62)}{=} \delta_j^l\delta_k^m - \delta_j^m\delta_k^l
\end{aligned}
\tag{2.75}
$$

となり証明できる。上記の式変形の 3 番目の等号で、右辺 1 行目と 2 行目でお互いにキャンセルする項を追加しているところがポイントである。

ベクトル三重積

公式 (2.70) が威力を発揮するもっとも顕著な適用例が、ベクトル三重積の公式の証明である。

ベクトル三重積の公式

$$
\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{2.76}
$$

証明： $\boldsymbol{D}\equiv\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ とすると、$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D}$ であるから、

$$
[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_i = [\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{D}]_i = \epsilon_{ijk}A^jD^k \tag{2.77}
$$

である。ここで、$D^k = (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})^k$ を

$$
D^k = \epsilon^{kij}B_iC_j \tag{2.78}
$$

とあらわしたくなるが、これはダメである。なぜならば、これを (2.77) 式に代入すると、

$$
[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_i = \epsilon_{ijk}A^j\epsilon^{kij}B_iC_j \tag{2.79}
$$

となり、添字 i,j の競合が起こってしまうからである。そこで、代入する先の (2.77) 式での競合が起こらないように、i, j 以外の添字を用いて、

$$
D^k = \epsilon^{klm}B_lC_m \tag{2.80}
$$

とあらわす[*17]。**これ以降はこのような説明は行わないので、ここで確実に納得・理解して自分でも計算できるようにしておくこと。**

[*17] もちろん、競合が起こらなければ l,m 以外の添字を用いてもよい。

すると、(2.76) 式の左辺の i 成分は

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})]_i &= \epsilon_{ijk}A^jD^k = \epsilon_{ijk}A^j\epsilon^{klm}B_lC_m = \epsilon_{ijk}\epsilon^{klm}A^jB_lC_m \\
&\overset{(2.70)}{=} (\delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^l)A^jB_lC_m = A^jB_iC_j - A^jB_jC_i \\
&= (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})B_i - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})C_i
\end{aligned}
\tag{2.81}
$$

よって (2.76) 式が成り立つ。

ベクトル三重積では結合法則が成り立たないことは注意するに値する。すなわち、

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \neq (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} \tag{2.82}$$

である。実際、

$$
\begin{aligned}
[(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}]_i &= \epsilon_{ijk}(\epsilon^{jlm}A_lB_m)C^k = -\epsilon_{jik}\epsilon^{jlm}A_lB_mC^k \\
&= -(\delta_i^l\delta_k^m - \delta_i^m\delta_k^l)A_lB_mC^k = -A_iB_kC^k + A_jB_kC^k \\
&= (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})B_i - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})A_i
\end{aligned}
\tag{2.83}
$$

であるから、

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} \tag{2.84}$$

であり、これは (2.76) 式とは一致しない。

∇ を含むベクトル三重積

∇ を含む場合には (2.76) 式を用いることはできないことも注意しておく。例えば、

∇ を含むベクトル三重積の公式

$$[\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})]_i = \boldsymbol{A}\cdot(\partial_i\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)B_i \tag{2.85}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{2.86}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \\
&= \big[(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\big]\boldsymbol{A} - \big[(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\big]\boldsymbol{B}
\end{aligned}
\tag{2.87}
$$

であるが (演習問題 2.5.4 で証明する)、これらの結果は (2.76) 式からは得られない[*18]。

これらの例が示すように、Levi-Civita 記号を使えるようになれば、ベクトル解析は「アインシュタインの和の規約を用いた (少し) 複雑な計算」に過ぎないものになり、少し慣れればベクトル解析の公式を覚える必要はなくなる[*19]。

2.A　2 章の演習問題

演習問題 2.1: (重要) 多次元のオイラー・ラグランジュ方程式

アインシュタインの規約を用いて、多次元の場合のオイラーラグランジュ方程式を導け。

[*18] 通常のベクトルに対しては $A_iB^i = B^iA_i$ すなわち $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$、あるいは $A_iB_j = B_jA_i$ のような交換が可能なのに対し、微分演算子については順序が重要であるため、$\partial_iB^i \neq B^i\partial_i$ すなわち $\nabla\cdot\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\cdot\nabla$、および $\partial_iB_j \neq B_j\partial_i$ であるからである。

[*19] 有限の脳の記憶・処理能力を暗記に使うのはもったいないので、なるべく「機械的に」「導出できる」ようにというのがアインシュタインの和の規約やクロネッカーのデルタ、Levi-Civita 記号を解説した動機である。これらを習得すれば、たくさんあるベクトル解析の公式は覚える必要は無いし、多変数関数の様々な計算がかなり見通しよく行えるようになる。

演習問題 2.2: 2 **次元極座標における運動方程式**

2.2.1: **ニュートン方程式からの導出**

2 次元平面上の質点がポテンシャル力 $\boldsymbol{F} = \nabla U$ を受けて運動している。デカルト座標 (x, y) の運動方程式

$$m\ddot{x} = -\partial_x U, \quad m\ddot{y} = -\partial_y U \tag{2.88}$$

を 2 次元極座標 (r, θ) で表せ。

略解 1：(非推奨) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ より、$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\,\dot{\theta},\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta}$ であり、さらに時間微分すると

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\cos\theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\sin\theta,\\ \ddot{y} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\sin\theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos\theta\end{aligned} \tag{2.89}$$

となる。これを運動方程式に代入する。($\ddot{x}$ の式 $\times$ $\cos\theta$) $+$ ($\ddot{y}$ の式 $\times$ $\sin\theta$) と ($\ddot{x}$ の式 $\times(-\sin\theta)$) $+$ ($\ddot{y}$ の式 $\times$ $\cos\theta$) からそれぞれ、

$$\begin{aligned}m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= -\cos\theta\partial_x U - \sin\theta\partial_y U,\\ mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} &= \sin\theta\partial_x U - \cos\theta\partial_y U\end{aligned} \tag{2.90}$$

が得られる。ここで偏微分の関係式

$$\begin{aligned}\partial_r &= \frac{\partial x}{\partial r}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial r}\partial_y = \cos\theta\partial_x + \sin\theta\partial_y,\\ \frac{1}{r}\partial_\theta &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial x}{\partial\theta}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial\theta}\partial_y\right] = -\sin\theta\partial_x + \cos\theta\partial_y\end{aligned} \tag{2.91}$$

を用いれば、極座標での運動方程式

$$\begin{aligned}m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= -\partial_r U,\\ mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} &= -\frac{1}{r}\partial_\theta U\end{aligned} \tag{2.92}$$

にたどり着く。

略解 2：(推奨) r 方向の基底ベクトルの時間微分

$$\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r = (\partial_r\hat{\boldsymbol{e}}_r)\,\dot{r} + (\partial_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_r)\,\dot{\theta} = \dot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{2.93}$$

をさらに時間微分して

$$\begin{aligned}\ddot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r &= \ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \dot{\theta}\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_\theta = \ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta + \dot{\theta}[(\partial_r\hat{\boldsymbol{e}}_\theta)\,\dot{r} + (\partial_\theta\hat{\boldsymbol{e}}_\theta)\,\dot{\theta}\,]\\ &= \ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{e}}_\theta - \dot{\theta}^2\hat{\boldsymbol{e}}_r\end{aligned} \tag{2.94}$$

これより、

$$\begin{aligned}m\ddot{\boldsymbol{r}} &= m(r\hat{\boldsymbol{e}}_r)^{\cdot\cdot} = m(\dot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r)^{\cdot} = m(\ddot{r}\hat{\boldsymbol{e}}_r + 2\dot{r}\dot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r + r\ddot{\hat{\boldsymbol{e}}}_r)\\ &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{e}}_r + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\end{aligned} \tag{2.95}$$

となる。ポテンシャルの項は

$$\nabla U = \partial_r U\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + \frac{1}{r}\partial_\theta U\,\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{2.96}$$

である。これらを運動方程式 $m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\nabla U$ に代入して、$\hat{\boldsymbol{e}}_r$, $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ の係数どうしでまとめればよい。

2.2.2: **オイラー・ラグランジュ方程式からの導出**

2 次元極座標におけるラグランジアンが

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r, \theta) \tag{2.97}$$

であることを示し、オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0 \tag{2.98}$$

から運動方程式を導出せよ。

ヒント： 2 次元極座標における速度ベクトルは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} &= \frac{d}{dt}(r\hat{\mathbf{e}}_r) = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\frac{d\hat{\mathbf{e}}_r}{dt} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\frac{d\hat{\mathbf{e}}_r(r,\theta)}{dt} = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\left[\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt}\right] \\ &= \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta \end{aligned} \tag{2.99}$$

であるから、

$$v^2 = (\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta)\cdot(\dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta) = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \tag{2.100}$$

この結果を用いて、具体的にオイラーラグランジュ方程式 (2.98) を計算すればよい[*20]。ニュートンの運動方程式を座標変換した場合と同じ結果が得られるはずである。このように、運動エネルギーだけの変換であればそれほど難しくないので、オイラー・ラグランジュ方程式を用いるのが簡単である。

演習問題 2.3: **オイラー・ラグランジュ方程式の導出練習**

2.3.1: **放物運動**

質量 m の質点のデカルト座標で z 方向の一様重力場中の放物運動のラグランジアンを書き下し、オイラー・ラグランジュ方程式を導け。

略解： 運動エネルギーは

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{2.101}$$

一様重力場なので、$z = 0$ を基準にした重力ポテンシャルエネルギー (位置エネルギー) は

$$U = mgz \tag{2.102}$$

よってラグランジアンは

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \tag{2.103}$$

オイラーラグランジュ方程式より、運動方程式は

$$m\ddot{x} = 0, \quad m\ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -mg \tag{2.104}$$

2.3.2: **2 次元単振り子**

長さ l(一定) の糸で吊るされた質量 m の単振り子について、1 次元座標系として、糸が鉛直方向となす角 θ をとり、ラグランジアンを書き下し、オイラー・ラグランジュ方程式を導け。

[*20] $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ の結果だけならば、動径方向の速度成分が $v_r = \dot{r}$ であり、角度方向の速度成分が $v_\theta = r\dot{\theta}$ であることに気づけば、もっと簡単に導出できる。

略解： 一定の長さの糸で吊るされているので r 方向の速度は $v_r = \dot{r} = 0$、θ 方向の速度は $v_\theta = l\dot{\theta}$ であるから運動ネルギーは[*21]

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{2.105}$$

$\theta = 0$ の位置を原点とするとポテンシャルエネルギー (位置エネルギー) は

$$U = mgl(1 - \cos\theta) \tag{2.106}$$

よってラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta) \tag{2.107}$$

オイラーラグランジュ方程式より、運動方程式は

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta. \tag{2.108}$$

振り子の振動が微小 $\theta \ll 1$ の場合には、$\sin\theta \approx \theta$ より運動方程式は、

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \tag{2.109}$$

となるが、さらに $x = l\sin\theta \approx l\theta$ に注意すると、

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x \tag{2.110}$$

となり、よく知られた (微小振幅の) 振り子の方程式 (単振動) が得られる。

2.3.3: 惑星の運動

中心力ポテンシャル中では角運動量が保存することを示し、そこから惑星の軌道面は一定であることを議論せよ。すると軌道平面内の 2 次元極座標を座標系にとることができる。質量 M の恒星のまわりの質量 m の惑星の運動のラグランジアンを書き下し、オイラー・ラグランジュ方程式を導け。

略解： 角運動量 $\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ に対して、外積の性質と運動方程式を用いると、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{2.111}$$

となる。ここで $\boldsymbol{F}$ が中心力 ($\boldsymbol{F} \propto \boldsymbol{r}$) の場合には、$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \propto \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = 0$ より $d\boldsymbol{L}/dt = 0$. よって角運動量が保存する。

軌道面に 2 次元極座標 (r, φ) を設定すると、惑星の運動エネルギーは

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) \tag{2.112}$$

無限遠を基準にしたポテンシャルエネルギーは、

$$U = -\frac{GMm}{r} \tag{2.113}$$

オイラーラグランジュ方程式より、運動方程式は、

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{GMm}{r^2}, \qquad \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0 \tag{2.114}$$

となる。ここで両辺に m をかけておいた。この第 2 式は $|\boldsymbol{L}| = mrv_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ より角運動量の保存則をあらわしている。また、第 1 式右辺の第 1 項 $mr\dot{\varphi}^2$ は、$\dot{\varphi}$ が角速度 ($\dot{\varphi} = \omega$) であるから遠心力項をあらわしている。

---

*21 あるいは、$\theta = 0$ の位置を原点とすると $x = l\sin\theta$, $y = l(1 - \cos\theta)$ であるから、$\dot{x} = l\cos\theta\,\dot{\theta}$, $\dot{y} = l\sin\theta\,\dot{\theta}$。この結果からも、$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2\dot{\theta}^2$ より、運動エネルギーが計算できる。

2.3.4: 2 重振り子

長さ l(一定) の 2 本の糸で吊るされた 2 重振り子について、上の振り子 (質量 m) が鉛直方向となす角 θ と下の振り子 (質量 M) が鉛直方向となす角 φ を座標にとり、ラグランジアンを書き下し、オイラー・ラグランジュ方程式を導け。ただし、振り角の 2 次の微小量までの計算でよい。また、2 重振り子が鉛直に垂れ下がった状態 ($\theta = \varphi = 0$) を位置エネルギーの原点にとるものとする。

略解： 上の振り子の座標を (x, y), 下の振り子の座標を (X, Y) とすると、作図すればわかるように (作図して説明すること)、

$$x = l\sin\theta, \qquad y = l\cos\theta \tag{2.115}$$

$$X = l\sin\theta + l\sin\varphi, \qquad Y = l\cos\theta + l\cos\varphi \tag{2.116}$$

である。これより、

$$\dot{x} = l\dot{\theta}\cos\theta, \qquad \dot{y} = -l\dot{\theta}\sin\theta \tag{2.117}$$

$$\dot{X} = l\dot{\theta}\cos\theta + l\dot{\varphi}\cos\varphi, \qquad \dot{Y} = -l\dot{\theta}\sin\theta - l\dot{\varphi}\sin\varphi \tag{2.118}$$

よって、運動エネルギーは

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}M(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \\ &= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Ml^2\big(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta - \varphi)\big) \end{aligned} \tag{2.119}$$

θ, φ, $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ の 2 次の微小量までては、

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}Ml^2(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \tag{2.120}$$

となる。一方、$\theta = \varphi = 0$ を基準としたポテンシャルエネルギーは

$$U = mgl(1 - \cos\theta) + Mg\left[l(1 - \cos\theta) + l(1 - \cos\varphi)\right] \tag{2.121}$$

θ, φ の 2 次の微小量までては、

$$U = \frac{1}{2}(m + M)gl\theta^2 + \frac{1}{2}Mgl\varphi^2 \tag{2.122}$$

オイラーラグランジュ方程式より、

$$(m + M)l\ddot{\theta} + Ml\ddot{\varphi} = -(m + M)g\theta \tag{2.123}$$

$$\ddot{\theta} + \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi \tag{2.124}$$

演習問題 2.4: (重要) ラグランジアンの自由度

ラグランジアンには、q^i と t の任意の (汎) 関数 $A(q^i, t)$ の時間に関する全微分を加える自由度があることを示せ。すなわち、

$$L'(q^i, \dot{q}^i, t) = L(q^i, \dot{q}^i, t) + \frac{dA(q^i, t)}{dt} \tag{2.125}$$

によっても L の場合と同じオイラー・ラグランジュ方程式が得られることを示せ。

略解： ラグランジアン L' の場合の作用を S'、L の場合の作用を S とすると、

$$S'[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dA(q^i, t)}{dt}dt = S[q] + \big[A(q^i, t)\big]_{t_1}^{t_2} \tag{2.126}$$

であるが、$t = t_1$, t_2 では q^i は固定されているので、$[A(q^i, t)]_{t_1}^{t_2}$ は変分で変化しない定数であり、作用の変分をとる際に 0 になってしまう。よって、

$$\delta S' = \delta S \tag{2.127}$$

したがって、導かれるオイラー・ラグランジュ方程式も同じものが得られる。

演習問題 2.5: (重要) Levi-Civita 記号とベクトル解析の公式

2.5.1: 回転の発散はゼロ

ベクトル解析の公式 (2.60) の証明の省略されている部分を補って証明を完成させよ。

2.5.2: 勾配の回転はゼロ

ベクトル解析の公式 (2.67) を証明せよ。

略解：デカルト座標で証明する。(2.67) 式の左辺の i 成分を Levi-Civita 記号を用いて表せば

$$(\nabla \times \nabla f)_i = \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f \tag{2.128}$$

ここで、偏微分が入れ替え可能であること、Levi-Civita 記号の反対称性、アインシュタインの和の規約における添字の書き換えを用いると、

$$\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f = \epsilon_{ijk}\partial_k\partial_j f = -\epsilon_{ikj}\partial_k\partial_j f = -\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f \tag{2.129}$$

と変形できる (式変形を納得し、説明を加えること)。これより、

$$2\epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k f = 0. \tag{2.130}$$

2.5.3: Levi-Civita 記号の重要公式から導かれる公式

Levi-Civita 記号の公式 (2.70) を用いて

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijl} = 2\delta_k^l \tag{2.131}$$
$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk} = 6 \tag{2.132}$$

を示せ。

略解：Levi-Civita 記号の公式 (2.70) より

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijl} = \delta_j^j\delta_k^l - \delta_j^l\delta_k^j \overset{(1.62),(1.63)}{=} 3\delta_k^l - \delta_k^l = 2\delta_k^l \tag{2.133}$$

2 番めの結果は 1 番目の結果に $\delta_i^i = 3$ を用いれば直ちに得られる。

2.5.4: ∇ を含む三重積

Levi-Civita 記号の公式 (2.70) を用いて

$$[\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B})]_i = \boldsymbol{A} \cdot (\partial_i \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla) B_i \tag{2.134}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{2.135}$$
$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A}(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} \tag{2.136}$$

を示せ。

略解：最初の公式は、**他の添字と混同が起こらないように、先を見通しながら添え字をつけて、**

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B})]_i &= \epsilon_{ijk}A^j(\epsilon^{klm}\partial_l B_m) = \epsilon_{ijk}\epsilon^{klm}A^j\partial_l B_m = \epsilon_{kij}\epsilon^{klm}A^j\partial_l B_m \\ &= (\delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^l)A^j\partial_l B_m = A^j\partial_i B_j - A^j\partial_j B_i \\ &= \boldsymbol{A} \cdot (\partial_i \boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla) B_i \end{aligned} \tag{2.137}$$

より示せる。

同様に、

$$
\begin{aligned}
[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})]_i &= \epsilon_{ijk}\partial^j(\epsilon^{klm}\partial_l A_m) = \epsilon_{ijk}\epsilon^{klm}\partial^j(\partial_l A_m) \\
&= (\delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^l)\partial^j(\partial_l A_m) = \partial^j\partial_i A_j - \partial^j\partial_j A_i \\
&= \partial_i\partial^j A_j - \partial^j\partial_j A_i = \partial_i(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2 A_i \\
&= \left[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}\right]_i
\end{aligned}
\tag{2.138}
$$

よって (2.135) 式が成り立つ。
(2.136) 式の証明は以下の通り。

$$
\begin{aligned}
\left[\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\right]^i &= \epsilon^{ijk}\partial_j(\epsilon_{klm}A^l B^m) = (\delta_l^i\delta_m^k - \delta_l^k\delta_m^i)\partial_j(A^l B^m) \\
&= (\delta_l^i\delta_m^k - \delta_l^k\delta_m^i)(B^m\partial_j A^l + A^l\partial_j B^m) \\
&= B^j\partial_j A^i - B^i\partial_j A^j + A^i\partial_j B^j - A^j\partial_j B^i \\
&= (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)A^i - B^i(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) + A^i(\nabla\cdot\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)B^i
\end{aligned}
\tag{2.139}
$$

2.5.5: ベクトル三重積と結合則

ベクトル三重積では結合法則が成り立たないこと $(\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C})$ を示せ。

演習問題 2.6: (重要) 回転変換に対する 2 つの考え方

2 次元空間のあるベクトル $\boldsymbol{V}$ が与えられたとき*22、その角度 θ の回転変換を考えよう*23。ここで、「回転変換」には次の 2 種類があることに注意しよう*24。

1. $\boldsymbol{V}$ はそのままにしておいて、座標系 (観測者) を回転する*25(図 2.1(a) 参照)。
2. 座標系 (観測者) はそのままにしておいて、$\boldsymbol{V}$ (物理法則あるいは物理系) を回転する*26(図 2.1(b) 参照)。

この 2 つの回転それぞれの場合について、ベクトル $\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{V}$ のデカルト座標における成分 V^x, V^y、および基底ベクトルがどのように変換されるかを求めよ。

略解：

1. **座標系の回転**: 定義よりベクトル $\boldsymbol{V}$ は不変である。基底ベクトルは

$$
\boldsymbol{e}_X = \cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y, \qquad \boldsymbol{e}_Y = -\sin\theta\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\boldsymbol{e}_y \tag{2.140}
$$

のように変換する (納得できるように説明せよ)。すなわち

$$
\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_X\\ \boldsymbol{e}_Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_x\\ \boldsymbol{e}_y\end{pmatrix} \tag{2.141}
$$

である。ここで、ベクトル $\boldsymbol{V}$ が不変であるためには、成分が

$$
\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}^X\\ \boldsymbol{V}^Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}^x\\ \boldsymbol{V}^y\end{pmatrix} \tag{2.142}
$$

*22 このベクトル $\boldsymbol{V}$ は必ずしも幾何学的な (矢印) ベクトルでなくてもよい。例えばニュートンの運動方程式やマクスウェル方程式はベクトル方程式であるから、これらの物理法則もいわば「ベクトル」であると言える。

*23 ベクトル $\boldsymbol{V}$ が幾何学的な矢印であれば単にそれを回転する操作であるが、$\boldsymbol{V}$ がベクトル方程式で表される物理法則であれば、物理法則を「回転」させることになる。

*24 回転変換に限らず、より一般の変換の場合にも、座標系の変換と物理系の変換の 2 種類を考えることができる。

*25 ベクトル $\boldsymbol{V}$ が物理法則だとすると、これはガリレイ変換やローレンツ変換など、観測者による物理法則の「見方の違い」に相当する。　もちろん、「見方」は異なれど、物理法則 (ベクトル $\boldsymbol{V}$) は不変であるべきであろう。

*26 このタイプの変換の概念は、物理系の対称性と関連しており、3 章で重要となる。例えば、「回転変換」によって物理系 (今の場合にはラグランジアン L) が不変であったとしよう (回転対称性を持つという)。　これは、回転によって変わらないすなわち保存されるものがあることを示唆する。そして、その保存されるものは角運動量であることが 3 章で示される。

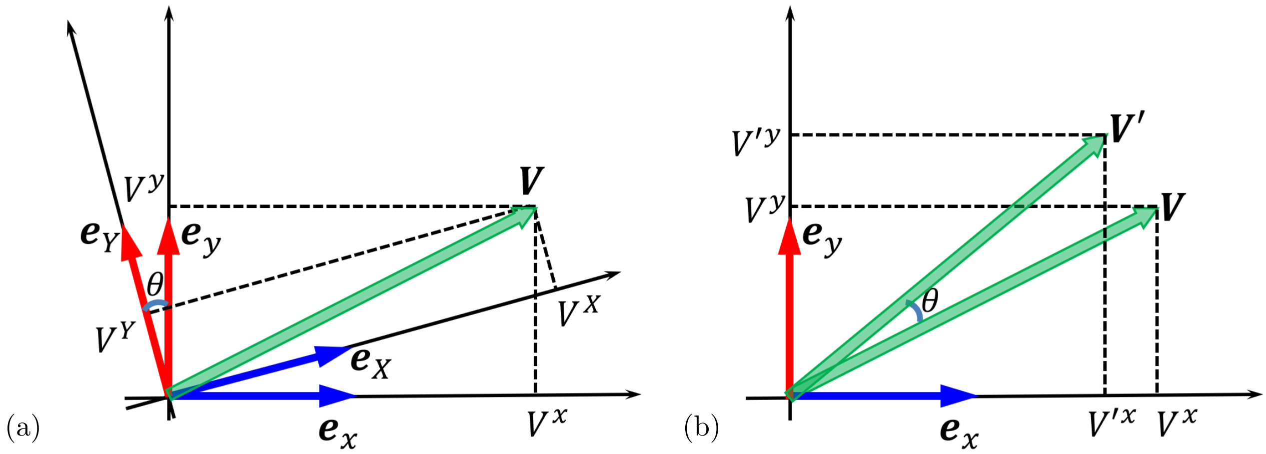

図 2.1　(a) 座標系の回転と (b) 物理系の回転の概念図。座標系の回転 (a) では、基底ベクトル (観測者の観測の仕方) が変換されるとともに、ベクトルの成分 (観測者が知る値) も変更を受けるが、ベクトルそのものは不変である。物理系の回転 (b) では、観測者系は不変であり、ベクトル (物理系、世界) を回転させる。

であればよい ($V^X = aV^x + bV^y, V^Y = cV^x + dV^y$ とおいて、$\boldsymbol{V}$ の不変性 $\boldsymbol{V} = V^X\boldsymbol{e}_X + V^Y\boldsymbol{e}_Y = V^X\boldsymbol{e}_X + V^Y\boldsymbol{e}_Y$ から係数 a, b, c, d を具体的に決定せよ)。実際、このとき、転置行列の性質

$$(AB)^T = B^T A^T \tag{2.143}$$

に注意すれば、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V} &= V^X\boldsymbol{e}_X + V^Y\boldsymbol{e}_Y = (V^X \ \ V^Y)\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_X \\ \boldsymbol{e}_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}^X \\ \boldsymbol{V}^Y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_X \\ \boldsymbol{e}_Y \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{V}^x \\ \boldsymbol{V}^y \end{pmatrix}\right]^T \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \end{pmatrix} \\
&= (V^x \ \ V^y)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \end{pmatrix} \\
&= (V^x \ \ V^y)\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \end{pmatrix} = V^x\boldsymbol{e}_x + V^y\boldsymbol{e}_y
\end{aligned} \tag{2.144}$$

となっており、たしかに $\boldsymbol{V}$ そのものは座標変換で不変である。

2. **物理系の回転**: 定義より、基底ベクトルは不変である。ベクトル $\boldsymbol{V}$ は回転変換を受けて $\boldsymbol{V}'$ となるが、図 2.2 に示すとおり、これは、ベクトルの成分値を (V^x, V^y) に固定したまま、基底ベクトルを (2.140) 式に従って $\boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y$ に変換した結果として得られる。すなわち、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}' &= V^x\boldsymbol{e}_X + V^y\boldsymbol{e}_Y \\
&= (V^x\cos\theta - V^y\sin\theta)\boldsymbol{e}_x + (V^x\sin\theta + V^y\cos\theta)\boldsymbol{e}_y \\
&= V'^x\boldsymbol{e}_x + V'^y\boldsymbol{e}_y
\end{aligned} \tag{2.145}$$

最後の等式より、**物理系の回転**に伴うベクトルの成分の変換則

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{V}'^x \\ \boldsymbol{V}'^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{V}^x \\ \boldsymbol{V}^y \end{pmatrix} \tag{2.146}$$

が得られる。**座標系の回転**に伴うベクトルの成分の変換則 (2.142) 式との符号の違いと、基底ベクトルの違いにもに注意すること。

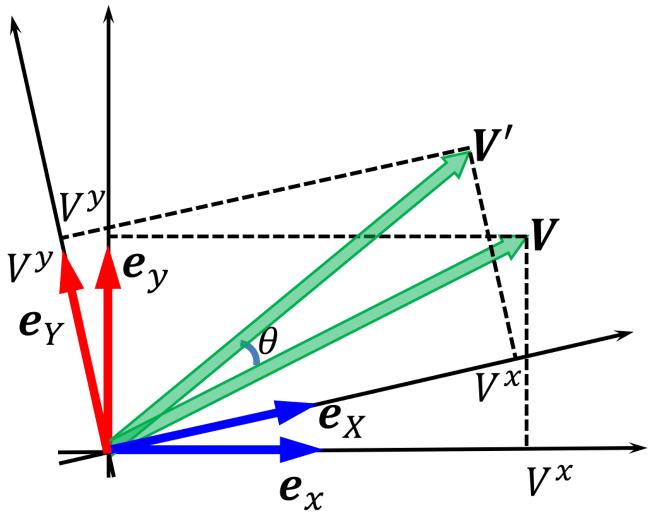

図 2.2　物理系の回転ではベクトル $\boldsymbol{V}$ は変換を受けるが、それはベクトルの成分値を (V^x, V^y) に固定したまま、基底ベクトルを (2.140) 式に従って $\boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y$ に変換した結果として得られる。

演習問題 2.7: (加点問題) 熱力学第 1 法則と全微分

熱力学第 1 法則

$$d'Q = dU + PdV \tag{2.147}$$

において、Q は T, P, V のいずれか 2 つを指定して決まる状態量ではなく、したがって、その変化を全微分 dQ によって表すことはできないことを次のようにして示せ[*27]。

1. 2 変数 x, y に依存する 1 次の微小量

$$g(x,y)dx + h(x,y)dy \tag{2.148}$$

を考える。ここで $g(x,y)$, $h(x,y)$ は x, y について微分可能な[*28]関数とする。これは一般に、全微分で表されるとは限らない。ある微分可能な関数 $f(x,y)$ が存在して、(2.148) 式がその全微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{2.149}$$

となっているための必要条件 (積分可能条件) が、

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} \tag{2.150}$$

で与えられることを示せ。

2. 積分可能条件 (2.150) が $f(x,y)$ が存在するための十分条件にもなっていることを示せ。
3. 熱力学第 1 法則 (2.147) において、U と P が (T,V) の関数として記述されているとする[*29]。積分可能条件を調べ、$d'Q$ は全微分とはならないこと、したがって Q が (T,V) を指定して決まる関数 ((T,V) の状態量) ではないことを示せ。

[*27] 熱力学も、偏微分と全微分をはじめとする多変数関数の微分について学ぶためのよい題材である。今後、各章の演習問題で幾つかの問題に取り組む。
[*28] この問題では、簡単のため、微分可能な関数は x, y について C^∞ 級である (何回でも微分できる「なめらかな関数」) とする。
[*29] 温度 T と体積 V が制御できる環境下を想定している。

4. (T,V) ではなく (T,P) を独立変数と考える場合にも $d'Q$ は全微分とはならないことを示せ。

略解：

1. 必要条件「全微分となる $f(x,y)$ が存在するならば、積分可能条件が成り立つ」を示せばよい。仮定より、$f(x,y)$ の全微分 (2.149) と (2.148) 式が等しいので、

$$\frac{\partial f}{\partial x}=g(x,y),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=h(x,y) \tag{2.151}$$

である。ここで $f(x,y)$ の微分可能性より

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \tag{2.152}$$

であるから[*30]、これを (2.151) 式に用いれば、積分可能条件 (2.150) が成り立つ。

2. (2.151) 式を積分して、具体的に関数 $f(x,y)$ を構築することで、十分条件「積分可能条件が成り立てば、$f(x,y)$ が存在する」を示す。

$$\frac{\partial f}{\partial x}=g(x,y) \tag{2.153}$$

を積分すれば、$u(y)$ を y の任意関数として、

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x}dt\,g(t,y)+u(y) \tag{2.154}$$

となる[*31]。

問題は (2.154) 式の $f(x,y)$ が

$$\frac{\partial f}{\partial y}=h(x,y) \tag{2.155}$$

を満たすかどうかである。これについて調べるために (2.154) 式を y で微分すると、

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}dt\,\frac{\partial g(t,y)}{\partial y}+\frac{du(y)}{dy} \tag{2.156}$$

となるが[*32]、**積分可能条件 (2.150) を用いる**と、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}&\overset{(2.150)}{=}\int_{x_0}^{x}dt\,\frac{\partial h(t,y)}{\partial t}+\frac{du(y)}{dy}\\&=\quad h(x,y)-h(x_0,y)+\frac{du(y)}{dy}\end{aligned} \tag{2.157}$$

を得る。

ここで任意に選べる関数 $u(y)$ を

$$u(y)=\int_{y_0}^{y}ds\,h(x_0,s) \tag{2.158}$$

[*30] (2.152) 式が成り立つためのの要請としては $f(x,y)$ が C^∞ 級であるという条件は強すぎる。最も弱い条件としては、
(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ がともに存在して連続 (C^0 級) であり、
(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ の**いずれか**が存在して連続であること、
が満たされていればよい。熱力学では相転移を取り扱うが、相転移点における連続性の取り扱いは注意を要する (「熱力学の基礎」清水明 (東京大学出版会) 参照)。したがって、このような数学的に最もゆるい条件に留意することは重要になる。

[*31] 積分定数ではなく、積分関数 $u(y)$ の自由度があることに注意。(2.154) 式が解になっていることは、$g(t,y)$ の t についての原始関数を $G(t,y)$ とすれば、(2.154) 式より、

$$f(x,y)=G(x,y)-G(x_0,y)+u(y)$$

これを x で微分すると、$\partial_x G(x_0,y)=\partial_x u(y)=0$, $\partial_x G(x,y)=g(x,y)$ より (2.153) が満たされることから分かる。

[*32] 細かい点だが、y 微分を中に入れられるのは $f(x,y)$ の微分可能性のおかげである。

のように選べば、$\dfrac{du(y)}{dy} = h(x_0, y)$ より、(2.155) 式も満たされる。以上により、所望の $f(x,y)$ が

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} dt\, g(t,y) + \int_{y_0}^{y} ds\, h(x_0, s) \tag{2.159}$$

のように構築できたので、十分条件も成り立つ。

3. 熱力学量を (T,V) の関数とする立場では、dU などの**変化量**を全て dT, dV に対する変化として定式化する必要がある。$U = U(T,V)$ より、

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial V} dV \tag{2.160}$$

よって

$$d'Q = dU + PdV = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} + P\right) dV \tag{2.161}$$

を得る。

$$g(T,V) = \frac{\partial U}{\partial T}, \qquad h(T,V) = \frac{\partial U}{\partial V} + P \tag{2.162}$$

として積分可能条件が成り立っているかを調べると、

$$\frac{\partial g}{\partial V} = \frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} \tag{2.163}$$

$$\frac{\partial h}{\partial T} = \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial V} + \frac{\partial P}{\partial T} \tag{2.164}$$

であるが、一般に $\dfrac{\partial P}{\partial T} \neq 0$ であるから成立しない。よって $d'Q$ は $Q(T,V)$ の全微分とはならず、Q は (T,V) を指定して一意的に決まる状態量ではない。

4. 前問と同様にして示せるので各自の課題とする。

第 3 章

対称性と保存則

3.1 共役運動量とハミルトニアン

3.1.1 共役運動量とハミルトニアンの定義

オイラー・ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = 0 \tag{3.1}$$

において、

共役運動量 (canonical momentum)

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \tag{3.2}$$

を定義すると、力学的運動量 $\boldsymbol{p}^K \equiv m\boldsymbol{v}$ を用いた[*1]ニュートンの運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{p}^K}{dt} = -\nabla U, \quad \Longrightarrow \quad \frac{dp_k^K}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial q^k} \tag{3.3}$$

に近い形の方程式

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^k} \tag{3.4}$$

が得られる。**ここで $p_k = \partial L/\partial \dot{q}^k$ を一般座標 q^k に対する共役運動量 (canonical momentum) と呼ぶ**[*2]。

1 章の冒頭で述べたように、ラグランジアンは

$$L = (\text{運動エネルギー}) - (\text{ポテンシャルエネルギー}) = T - U \tag{3.5}$$

で定義されており、系の全エネルギー $T + U$ にはなっていない。そこで、系のエネルギーに対応する関数として、ハミルトニアン

[*1] ここで、添字 K は (Kinetic:力学的, 運動学的) をあらわすものである。共役運動量と力学的運動量は必ず一致するとは限らないので、わざわざ添字をつけて区別している。

[*2] 一般運動量と呼ぶ場合もある。本章の演習問題で示すように、一般に共役運動量は力学的運動量とは異なるが、自由粒子のような簡単な場合には一致する。

ハミルトニアン (Hamiltonian)

$$H(q^k, \dot{q}^k, t) \equiv \sum_k \dot{q}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - L = \sum_k \dot{q}^k p_k - L = \dot{q}^k p_k - L \tag{3.6}$$

を定義しよう[*3]。ここで最後の等号でアインシュタインの和の規約を用いている。

(3.6) 式で定義されるハミルトニアンがエネルギーに対応していることは、**ポテンシャルエネルギー U が速度 $\dot{q}^k$ に依存しない座標 q^k だけの関数 $U(q^k)$ である場合**を調べると納得できる。運動エネルギーをアインシュタインの規約をもちいてあらわすと、

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{q}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m \dot{q}_i \dot{q}^i \tag{3.7}$$

であり[*4]、共役運動量は

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = \frac{1}{2} m \frac{\partial (\dot{q}_i \dot{q}^i)}{\partial \dot{q}^k} \\ &= \frac{1}{2} m \left[\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^i + \dot{q}_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^k} \right] = \frac{1}{2} m \left[\delta_{ik} \dot{q}^i + \dot{q}_i \delta^i_k \right] = m \dot{q}_k \end{aligned} \tag{3.8}$$

であるから[*5]、

$$H = \dot{q}^k p_k - L = \dot{q}^k (m \dot{q}_k) - L = 2T - L = T + U \tag{3.9}$$

となるので、確かに系のエネルギーになっている。

3.1.2 補足事項: 座標変換に伴う共役運動量の変換則

(2.43) 式は座標変換に伴う共役運動量の変換則を与える。座標変換 $Q^k = Q^k(q^i)$ によってラグランジアンが $L \to L'$ と変換したとすると、共役運動量は $p_k = \dfrac{\partial L}{\partial q^k}$ から $P_k = \dfrac{\partial L'}{\partial Q^k}$ に変換するが、(2.43) 式より、その変換則は

$$P_k = \frac{\partial q^j}{\partial Q_j} p_j \tag{3.10}$$

で与えられることが分かる。

不思議なことに、この変換則は、(2.48) 式で与えた速度の変換則

$$V^k = \dot{Q}^k = \frac{\partial Q^k}{\partial q^j} \dot{q}^j = \frac{\partial Q^k}{\partial q^j} v^j \tag{3.11}$$

とは逆の関係にある。これは**共役運動量が下付き添字**で**速度が上付き添字**と添字の上下が逆になっていることと関係しており、その数学的背景については、8 章で解説する**テンソル解析**の初歩を学ぶと明らかになる。

3.2 対称性と保存則

ニュートンの第 2 法則は微分方程式で表されるが、これは**微分**、すなわち局所的なものの見方をしている。ハミルトンの原理は系全体をラグランジアンを**積分**した作用という一つの汎関数で表現しており、これ

[*3] ここで、和記号の上限 3 を省略した。以下でも同様に省略する。

[*4] ここで本来は $m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2 = m\dot{q}^i \dot{q}^i/2$ とせずに $m\dot{q}_i \dot{q}^i/2$ としたのにはそれなりの理由があるのであるが、現段階では上付きも下付きもあまり変わらないという理解でよい。

[*5] 慣れてくれば、ただちに $\dfrac{1}{2} m \dfrac{\partial (\dot{q}_i \dot{q}^i)}{\partial \dot{q}^k} = m \dot{q}_k$ とできるようになってくる。

はいわば、全体を見渡しているようなものである。すると、系に潜んでる対称性というものを見つけることが比較的に容易になる。実は、この対称性がエネルギー保存則や運動量保存則などの保存則と関連しているのであり、物理学において「系の持つ対称性」は重要な概念である。

対称性と保存則の関係性は、次のように考えれば理解しやすいかもしれない。保存則が成り立つということは (エネルギーなど) なにか「変わらないもの」があるということであり、「変わらない」ということは「区別がつかない」ということである。そして「区別がつかないこと」は「対称性があること」の定義そのものといえる。このようにして「対称性」と「保存則」は密接に関係している。本節ではその不思議な関係の導入部分についてまとめる。

まずはじめに、**系が対称性を持つ**ということを定義しておこう。

物理系が対称性を持つということ

ラグランジュ形式では、物理系はラグランジアン L によって記述されるから、**物理系が対称性を持つ**とは、ある**変換によってラグランジアンが不変**であることである。

Note.1: 演習問題 2.4 の結果より、実際には時間についての全微分の違いがあっても作用は不変に保たれるから、**変換によってラグランジアンがたかだか時間についての全微分の違いを除いて不変**であればよい。

Note.2: ここでいう「変換」とは、演習問題 2.6 における「物理系の回転」に相当する変換である。

3.2.1 時間の一様性とエネルギー保存則

少なくとも相対性理論を考えなければ[*6]時間の流れは一様であると考えてよいだろう。すると、物理系は

$$t \to t + t_0 \tag{3.12}$$

という、時間の平行移動 (時間並進) をしても不変であるべきである[*7]。このことを、物理系は時間並進に対する対称性を持つという。

系が時間並進対称性を持つ場合には、この変換でラグランジアンが不変であるので、**t_0 を特に微小量として**

$$\delta L = L(q^i, \dot{q}^i, t + t_0) - L(q^i, \dot{q}^i, t) = \frac{\partial L}{\partial t} t_0 = 0 \tag{3.13}$$

が成り立つ必要がある[*8]。そのためには、t_0 は任意であるので、$\partial L/\partial t = 0$, すなわちラグランジアンが時間に陽に依存しておらず、$L = L(q^k, \dot{q}^k)$ であればよい[*9]。

[*6] 相対性理論でも固有時は一様に流れる。

[*7] つまり、今日の物理法則と明日の物理法則は同じはずで、違っていては困るし、そんなことはないということである。

[*8] 1 章で解説したように、1 次の微小変化を考えればよい。

[*9] $q^k, \dot{q}^k$ が時間に依存する点が疑問に思うかもしれないが、この依存性は対称性とは関係ない。ここで気にしている時間依存性とは、例えば実験室全体を外部から暖めると、時間と共に熱 (エネルギー) が流入してくるので、物理系があらわに (陽に) 時間に依存して変わってしまうなどのような、実質上の時間変化があるかどうかについてである。この場合にも、外部熱源も系に含めたラグランジアンを構成すれば、ラグランジアンは時間には陽に依存しなくなるはずである。逆に言えば、どこまでを「物理系」として取り扱うかによって、系の対称性は変わりうる。

このとき、

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q^k}\frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{d\dot{q}^k}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right)\dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{d}{dt}\dot{q}^k = \frac{d}{dt}\left(\dot{q}^k\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right)$$
$$= \frac{d}{dt}(\dot{q}^k p_k) \tag{3.14}$$

であるから、左辺を移項すれば

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{q}^k p_k - L\right) = \frac{dH}{dt} = 0 \tag{3.15}$$

となり、ハミルトニアンが保存する。ハミルトニアンはエネルギーに対応するものであるから、物理系に時間並進対称性があると、ハミルトニアンすなわちエネルギーが保存すると結論づけることができる[*10]。

出席課題 S.3.1： (3.14) 式の計算の詳細を確認しつつ、物理系に時間並進対称性があると、エネルギーが保存することを示せ。

略解 (3.14) 式の計算においては、1 番目の等号では多変数関数の微分、2 番目の等号の際にオイラーラグランジュ方程式 (2.20)、3 番目の等号で「関数の積の微分の逆 ($\dot{f}g + f\dot{g} = d(fg)/dt$)」、最後の等号で共役運動量の定義を用いている。

3.2.2 空間の一様性と運動量保存則

物理系が空間の任意定ベクトル $\boldsymbol{a}$ による平行移動

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} \tag{3.16}$$

に対して不変であるとき、空間並進対称性を持つという。これは空間の一様性に起因している[*11]。このとき、ラグランジアンは空間並進に対して不変でなければならない。

いま $\boldsymbol{a}$ として微小の空間並進 $\boldsymbol{\epsilon}$ (= 一定) を選んだとすると、空間並進によるラグランジアンの変化は[*12]、

$$\delta L = L(q^k + \epsilon^k, \dot{q}^k, t) - L(q^k, \dot{q}^k, t) = \frac{\partial L}{\partial q^k}\epsilon^k \tag{3.17}$$

である。ここでオイラーラグランジュ方程式を用いれば

$$\delta L = \epsilon^k \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \tag{3.18}$$

となる。ラグランジアンが空間並進対称性を持つ場合には $\delta L = 0$ であり、これが任意の空間並進 ϵ^k について成立するためには、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = \frac{dp_k}{dt} = 0 \tag{3.19}$$

でなければならない。すなわち、$\boldsymbol{\epsilon}$ 方向の共役運動量が保存する。

出席課題 S.3.2： 物理系に空間並進対称性があると、その方向の共役運動量が保存することを示せ。

[*10] 実験室全体のような大きな話ではなくても、考えている物理系にあらわな時間変化を及ぼすような要因がある場合には時間対称性が破れてエネルギーは保存しなくなる。

[*11] 例えば実験室で物理系に磁場をかけると、磁場を横切る方向と磁場に沿った方向では、ローレンツ力が働くかそうでないかなど、空間の一様性は失われてしまうので、物理系は空間並進対称性を失う。しかし、より大局的にみれば、実験室そのものを平行移動する対称性は存在するので、磁場を発生させる装置も全部含めたより大きな物理系を考察してそのラグランジアンを与えることができれば、そのラグランジアンは空間並進対称性を回復する。つまり、磁場を発生させる装置を含んだ全体を平行移動すれば物理は変わらない。

[*12] $\boldsymbol{\epsilon}$ は定ベクトルであるから $\dot{\boldsymbol{q}}$ は変化しないことに注意。

3.2.3　空間の等方性と角運動量保存則

空間の等方性とは、空間の回転に対して物理法則が不変 (回転対称性) であることと考えてよい[*13]。

回転移動について考えよう[*14]。例として、z 軸まわりの角度 θ の回転を考える。$P(1,0)$ を回転させると $P'(\cos\theta, \sin\theta)$ になり、$Q(0,1)$ を回転させると $Q'(-\sin\theta, \cos\theta)$ になることは作図すればすぐに分かる。これは

$$\hat{\boldsymbol{e}}_x \to \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_y, \qquad \hat{\boldsymbol{e}}_y \to -\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_y \tag{3.20}$$

を意味する。

任意の点の位置ベクトルは $\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{e}}_x + y\hat{\boldsymbol{e}}_y$ と表される。この $\boldsymbol{r}$ を z 軸まわりに角度 θ 回転させたもの ($\boldsymbol{r}'$ とする) は、座標値を (x, y) に固定したまま、(3.20) 式の回転変換を行えば得られる (演習問題 2.6 参照)。すなわち、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} \quad \to \quad \boldsymbol{r}' &= x(\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_y) + y(-\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_y) \\ &= (x\cos\theta - y\sin\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_x + (x\sin\theta + y\cos\theta)\hat{\boldsymbol{e}}_y \end{aligned} \tag{3.21}$$

である。$\boldsymbol{r}' = x'\hat{\boldsymbol{e}}_x + y'\hat{\boldsymbol{e}}_y$ とすると、これは回転後の $\boldsymbol{r}'$ の座標が、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

のように変換を受けることを意味している[*15]。z 座標は変換を受けないから、3 次元空間における z 軸まわりの角度 θ の回転の作用は、回転行列

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

で与えられる。

回転角が微小角度 $\delta\theta$ の場合には、$\sin\delta\theta = \delta\theta$, $\cos\delta\theta = 1$ と近似することができるので、変換は

$$x' = x - y\delta\theta, \qquad y' = y + x\delta\theta, \qquad z' = z \tag{3.24}$$

となる。これは、z 軸まわりの角度 $\delta\theta$ 回転ベクトル

$$\delta\boldsymbol{\theta}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta\theta \end{pmatrix} = \delta\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{3.25}$$

を用いて、

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{\theta}_z \times \boldsymbol{x} \tag{3.26}$$

[*13] 空間の等方性では、すべての観測者あるいはすべての空間の点から見た等方性を要求しているわけではない。空間が等方的にみえる場所があれば (中心のようなものが見つかって)、そこで回転対称性が成り立つという意味である。余談であるが、我々の住む宇宙は、一様かつ等方であるとみなされている。これは、宇宙のどこから見ても、宇宙は等方的に見えるということを主張している。つまり、宇宙のどこも「中心」となっている！

[*14] ここでの回転移動は、ベクトル $\boldsymbol{r}$ を固定したまま**座標系**を回転させる座標変換ではなく、ベクトル $\boldsymbol{r}$ 自身を回転させる操作である (演習問題 2.6 参照)。

[*15] このように、回転行列を忘れていても導き出せるようになっておくことが重要である。

と表すことができることを意味している[*16]。

速度ベクトルは、$\delta\boldsymbol{\theta}_z$ が定ベクトルなので、

$$\dot{\boldsymbol{x}}' = \dot{\boldsymbol{x}} + \frac{d}{dt}(\delta\boldsymbol{\theta}_z \times \boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{x}}' = \dot{\boldsymbol{x}} + \delta\boldsymbol{\theta}_z \times \dot{\boldsymbol{x}} \tag{3.28}$$

のように変換する。

これらの結果をラグランジアンの回転変換に適用しよう。一般の座標変換に対するラグランジアンの変化は

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta \dot{q}^k = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta \dot{q}^k = \frac{dp_k}{dt}\delta q^k + p_k \delta \dot{q}^k \tag{3.29}$$

である。ここで、2 番目の等号でオイラーラグランジュ方程式を、3 番目の等号で共役運動量の定義 (3.2) を使った。ここで、回転変換では

$$(\delta\boldsymbol{q})^k = (\delta\boldsymbol{\theta}_z \times \boldsymbol{q})^k = \epsilon^{kij}(\delta\theta_z)_i q_j, \qquad (\delta\dot{\boldsymbol{q}})^k = (\delta\boldsymbol{\theta}_z \times \dot{\boldsymbol{q}})^k = \epsilon^{kij}(\delta\theta_z)_i \dot{q}_j \tag{3.30}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\delta L &= \frac{dp_k}{dt}\epsilon^{kij}(\delta\theta_z)_i q_j + p_k \epsilon^{kij}(\delta\theta_z)_i \dot{q}_j = (\delta\theta_z)_i \left(\epsilon^{kij} q_j \frac{dp_k}{dt} + \epsilon^{kij}\frac{dq_j}{dt}p_k\right) \\
&= (\delta\theta_z)_i \left(\epsilon^{ijk} q_j \frac{dp_k}{dt} + \epsilon^{ijk}\frac{dq_j}{dt}p_k\right) = (\delta\theta_z)_i\, \epsilon^{ijk}\left(q_j \frac{dp_k}{dt} + \frac{dq^j}{dt}p_k\right) \\
&= (\delta\theta_z)_i\, \epsilon^{ijk}\frac{d}{dt}(q_j p_k) = (\delta\theta_z)_i \frac{d}{dt}\left(\epsilon^{ijk} q_j p_k\right) \\
&= \delta\boldsymbol{\theta_z} \cdot \frac{d}{dt}(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}) = \delta\theta \boldsymbol{e_z} \cdot \frac{d}{dt}(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p}) \\
&= \delta\theta \frac{d}{dt}(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p})^z
\end{aligned} \tag{3.31}$$

となる。系に z 軸回りの回転対称性があれば $\delta L = 0$ でなければならないが、任意の $\delta\theta$ に対してこれが成り立つためには、

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p})^z = 0 \tag{3.32}$$

でなければならない。すなわち、系に z 軸回りの回転対称性がある場合、z 軸回りの角運動量 $L^z \equiv (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{p})^z$ が保存する。

出席課題 S.3.3： 作図して (3.20) 式を確かめよ。さらに、$\boldsymbol{r}$ を z 軸まわりに角度 θ 回転させたもの ($\boldsymbol{r}'$ とする) は、座標値を (x, y) に固定したまま、(3.20) 式の回転変換を行えば得られることを作図により確認せよ。

出席課題 S.3.4*： 微小角度の回転操作が (3.26) 式と表せることを示せ。

略解　(3.25) 式の $\delta\boldsymbol{\theta}_z$ を (3.26) 式に代入して、(3.24) 式が導かれることを示せばよい。以下では、アインシュタインの和の規約を用いた計算の表記が煩雑にならないようにするため、$\delta\boldsymbol{\theta}_z$ の δ と添字の z を取り除いておく ($\delta\theta_z \to \theta$)。Levi Civita 記号を用いると

$$\delta\boldsymbol{\theta}_z \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{x} = \epsilon_{ijk}\theta^j x^k \tag{3.33}$$

[*16] より一般に、z 軸回りとは限らない回転ベクトル $\delta\boldsymbol{\theta}$ の場合にも、回転操作によって

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{x} \tag{3.27}$$

の変換を受けることが示せる。

とあらわすことができる。θ^j は $j=z$ しか値を持たないから $\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{x}=\epsilon_{izk}\theta^z x^k=\epsilon_{izk}\theta x^k$ である。$i=x$ とすると、Levi-Civita 記号の対称性から $k=y$ 以外は 0 になるので、

$$(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{x})_x=\epsilon_{xzy}\theta y=-y\theta \tag{3.34}$$

ここで $\epsilon_{xyz}=1$ として隣同士の添字を交換する度に -1 がかかるので、$\epsilon_{xzy}=-\epsilon_{xyz}=-1$ であることに注意。$i=y$ の場合も同様に

$$(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{x})_y=+x\theta \tag{3.35}$$

を示すことができる。$i=z$ の場合には、ϵ_{ijk} の添字に同じものが入ると 0 になるという対称性から 0 である。

3.3 ネーターの定理 (Noether's theorem)

3.3.1 循環座標

循環座標

ラグランジアンがある座標 q^i によらないとき、q^i を循環座標と呼ぶ。循環座標があると、オイラーラグランジュ方程式において

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\overset{(3.2)}{=}\frac{dp_i}{dt}=0 \tag{3.36}$$

となるから 循環座標 q^i に対する共役運動量 p_i は時間に対して一定、すなわち保存する。

循環座標が見つかればこのように保存則に直結するが、循環座標は座標変換で現れたり消えたりする。たとえば、距離 $r=|\boldsymbol{x}|$ だけに依存するポテンシャル $U(r)$ がある場合の粒子のラグランジアンを 2 次元極座標 (r,θ) であらわすと

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-U(r) \tag{3.37}$$

となり θ によらないので、θ が循環座標となり、共役運動量である $\partial L/\partial\dot{\theta}=mr^2\dot{\theta}$ すなわち角運動量が保存する (演習問題)。

しかし、ラグランジアンをデカルト座標で書き表すと、

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-V(\sqrt{x^2+y^2})=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-V(x,y) \tag{3.38}$$

となるので、循環座標はなくなってしまう。しかしながら、角運動量という保存量が存在するという物理的事実は変わらないはずである。次節で説明するように、循環座標に頼らず、ラグランジアンが持つ対称性を保存則と結びつけるのがネーターの定理である。

3.3.2 ネーターの定理と保存量 (モーメント関数)

3.2.2 節の空間並進のベクトル $\boldsymbol{a}\,(a^i)$、3.2.3 節の微小回転角 $\delta\boldsymbol{\theta}\,(\delta\theta^i)$ など、ラグランジアンの対称性を調べるときには、もともとの軌道 q^k からの微小な変分を考えた。ここでは、a^i や $\delta\theta^i$ ような変分をひっくるめて、抽象的にパラメータ s で代表させて表すことにしよう[*17]。さらに、変換パラメータ s が微小である

[*17] 時間の一様性に関しては「軌道 q^k からの微小変化」のようには表せないので、別途特別に考える必要がある (3.3.4 節参照)。

という条件は取り除いて、$q^k(s)$, $\dot{q}^k(s)$ と一般的にあらわすことができるものとする。ただし、$q^k(0) = q^k$, $\dot{q}^k(0) = \dot{q}^k$ とする。

作用に極値を与えている軌道 q^k において、物理系がこの変換に対して不変である条件は、(物理系を規定している) ラグランジアンがこの変換に対して不変である条件と同値であり[*18]、

$$\begin{aligned}
0 = \delta L &= L(q^k(s), \dot{q}^k(s), t) - L(q^k(0), \dot{q}^k(0), t) \\
&= \frac{d}{ds} L(q^k(s), \dot{q}^k(s), t)\bigg|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial q^k}\frac{dq^k}{ds}\bigg|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{d\dot{q}^k}{ds}\bigg|_{s=0} \\
&= \frac{dq^k}{ds}\bigg|_{s=0}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{d\dot{q}^k}{ds}\bigg|_{s=0} = \frac{dq^k}{ds}\bigg|_{s=0}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{d}{dt}\frac{dq^k}{ds}\bigg|_{s=0} \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{dq^k}{ds}\bigg|_{s=0}\right]
\end{aligned} \tag{3.39}$$

となる[*19]。これより、

ネーターの定理 (Noether's theorem)

ラグランジアンに対称性

$$\frac{d}{ds} L(q^k(s), \dot{q}^k(s), t)\bigg|_{s=0} = 0 \tag{3.40}$$

あるいは

$$L(q^k(s), \dot{q}^k(s), t) = L(q^k(0), \dot{q}^k(0), t) = L(q^k, \dot{q}^k, t) \tag{3.41}$$

がある場合には、作用に極値を与えている軌道 q^k、すなわち運動方程式を満たす軌道に沿って、

$$I \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{dq^k}{ds}\bigg|_{s=0} \tag{3.42}$$

が保存する。**特に dq^k/ds が任意の定ベクトルである場合には $\partial L/\partial \dot{q}^k$ が保存する**。この I を変換の**モーメント関数**と呼ぶ。

ネーターの定理を適用する具体例としては、出席課題 S.3.6 および演習問題 3.2.2 を参照のこと。以下では $|_{s=0}$ の添字を省略する。

発展的補足

前節で見たように、時空あるいは物理系に対称性がある場合には保存量が存在したが、ラグランジアンに対する対称性の記述は座標に依存したものであった。循環座標の場合のように、複雑な座標系では系が持つ対称性が見えにくくなってしまうかもしれない。そこで、「保存量が存在する」ということ、「時空に対称性がある」ということ、あるいは「循環座標が存在する」ということを、座標によらないかたちで定式化することを考えることが必要となる。

そのためには、**数学では**曲線が座標によらずに「幾何学的」に定義されることを用いる。数学的には、曲線とは**曲線のラベル (パラメータ) すなわち数直線 R 上の点 s から、(3 次元) 空間 V の点 P への写像**である。つまり、曲線に沿ってラベル s がつけてあり、それを決めると、空間の点 P が決まるというものになっ

[*18] 幾何学的な見方では、ラグランジアンが曲線 $q^k(s)$ に沿って不変であればよいので、ということになる。
[*19] 先に、変換パラメータは微小でなくてもよいとしたが、(3.39) 式には微分 dq^k/ds しか出てこないので、すなわち、微分という局所的な情報しか含まれていないので、変換パラメータが微小でなくても実質的に成り立つ式になっている。

ている[*20]。数直線上のパラメータ s の付け方には自由度があるが、「座標」にはよらないので、曲線は座標によらない幾何学的なものである[*21]。

曲線を用いて議論を展開すると、座標系に依らない「幾何学的な」定式化をすることができる。つまり、物理系における変換を、ある曲線に沿っての「移動」としてとらえるのである。この「幾何学的な」見方のもとでは、一般座標 q^k に対して、そこから伸びる任意の曲線 $C(s)$ を考え、曲線に沿った変換を考えることになる。例えば、並進対称性を考える場合には、平行移動の結果として描かれる直線を「先に」考え、直線に沿って「移動」すると定式化することになる。同様に、回転対称性を考える場合には、空間回転の結果として描かれる円弧を想定し、これに沿った移動を考えることになる。

つまりは、変換によって座標が動く軌跡を曲線にとり、それを (先に) 想定しているから「幾何学的に」考えていますよ、と言い張るのである。曲線はパラメータ s で記述されているとすると、変換もパラメータ s をもちいてコントロールできるので、$q^k(s)$, $\dot{q}^k(s)$ とあらわされることになる。

出席課題 S.3.5：　(3.39) 式を示せ。

出席課題 S.3.6*：　1 次元自由粒子のラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \tag{3.43}$$

を考える。運動方程式を満たす軌道 q に対して、

$$q(t) \Longrightarrow q(t) + s \tag{3.44}$$

なる変換によってラグランジアンが不変であることを示せ。ネーターの定理 (3.42) より、運動量が保存することを示せ。

略解　s は t に依らないので、変換によって $\dot{q}$ すなわち L は不変。ネーターの定理 (3.42) より、

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{dq}{ds} = m\dot{q} \tag{3.45}$$

すなわち運動量が保存する。

3.3.3　ラグランジアンに時間の全微分を加える自由度があることを考慮した定式化

実際にはラグランジアンには時間の全微分を加える自由度がある (演習問題 2.4 参照)。したがって、ラグランジアンが変換 $q(s)$, $\dot{q}(s)$ によって不変ではなくても、ラグランジアンの変化 δL が時間の全微分で表される場合、すなわち

$$\delta L = s\frac{dF}{dt} \tag{3.46}$$

の場合には、物理系は対称性を持ち、対称性に関連して、

$$I' \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{dq^k}{ds} - F \tag{3.47}$$

が保存量となる。

実際、微小変換

$$q^k(s) = q^k + s\,\frac{dq^k}{ds} \equiv q^k + \delta q^k \tag{3.48}$$

---

*20 一方、座標とは (3 次元) 空間 V から座標 R^3 への写像であり、空間上のある点 P に 3 つの実数を対応付けする規則を与えるものである。

*21 ほとんど方便にも聞こえるかもしれないが。

に対して、

$$
\begin{aligned}
\delta L &= L(q^k+\delta q^k, \dot{q}^k+\delta\dot{q}^k, t) - L(q^k, \dot{q}^k, t) = \frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta \dot{q}^k \\
&= \frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k + \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta q^k\right) - \delta q^k \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta q^k\right) + \left[\frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k - \delta q^k \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right] \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta q^k\right)
\end{aligned}
\tag{3.49}
$$

となるが*22、左辺は (3.46) 式より $\delta L = sdF/dt$ であるから、(3.49) に代入すると、

$$
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\delta q^k - sF\right] = 0 \tag{3.50}
$$

となる。ここで (3.48) 式より、$\delta q^k = sdq^k/ds$ であったから、

$$
\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\left(s\frac{dq^k}{ds}\right) - sF\right] = s\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{dq^k}{ds} - F\right] = 0 \tag{3.51}
$$

すなわち、I' が保存する。I' もモーメント関数と呼ばれる (具体例として演習問題 3.2.1)。

3.3.4　発展的補足：時間の一様性とネーターの定理

時間並進についても、一般的な枠組みとしてネーターの定理に組み入れるためには少し工夫が必要である。そのためには、時間 t から伸びる時間軸方向の曲線を考え、パラメータ τ でラベルする。すなわち、実際の時間ではないが、時間と同等のパラメータ τ によって $t = t(\tau)$ とする。すると、$q^k(t)$ もパラメータ τ でラベルされることになるから、最小作用の原理は

$$
\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q^k, dq^k/dt, t)dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} L\left(q^k(\tau), \frac{dq^k/d\tau}{dt/d\tau}, t(\tau)\right)\frac{dt}{d\tau}d\tau = 0 \tag{3.52}
$$

となる。ここで、新しいラグランジアン $\hat{L}$ を

$$
\hat{L}\left(t, q^k,\, dt/d\tau,\, dq^k/d\tau\right) \equiv L\left(q^k(\tau), \frac{dq^k/d\tau}{dt/d\tau}, t(\tau)\right)\frac{dt}{d\tau} \tag{3.53}
$$

によって定義する。その上で、時間と空間を一緒にした座標を $q^\alpha = (t, q^k),\ (\alpha = 0, k)$ によって導入する。すると、

$$
\hat{L}\left(q^\alpha, dq^\alpha/d\tau\right) \equiv \hat{L}\left(t, q^k, dt/d\tau, dq^k/d\tau\right) \tag{3.54}
$$

のように、自由度の数が $dt/d\tau$ の分 1 つ増えた新しいラグランジアンとみなせる。最小作用の原理は

$$
0 = \delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \hat{L}(q^\alpha, dq^\alpha/d\tau)d\tau \tag{3.55}
$$

となるから、これよりオイラーラグランジュ方程式

$$
\frac{\partial \hat{L}}{\partial q^\alpha} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \hat{L}}{\partial(dp^\alpha/d\tau)} = 0 \tag{3.56}
$$

*22 ここで、最後の等号のところでオイラー・ラグランジュ方程式を用いた。

が導かれる。

ネーターの定理を、ラグランジアンを $\hat{L}$ に置き換えて、軌道を時間を含めた q^α に拡張すると次のようになる。

拡張されたネーターの定理

ラグランジアンに対称性

$$L\left(q^\alpha(s), \frac{dq^\alpha}{d\tau}(s)\right) = L\left(q^\alpha(0), \frac{dq^\alpha}{d\tau}(0)\right) = L\left(q^\alpha, \frac{dq^\alpha}{d\tau}\right) \tag{3.57}$$

がある場合には、作用に極値を与えている軌道 q、すなわち運動方程式を満たす軌道に沿って、

$$I \equiv \left.\frac{\partial L}{\partial\, dq^\alpha/d\tau}\frac{dq^\alpha}{ds}\right|_s \tag{3.58}$$

が保存する。

時間並進 $t(s) = t + s$ に対する対称性がラグランジアン $\hat{K}$ にある場合には、(3.58) 式で $q^\alpha \to t(s)$ として、モーメント関数

$$I = \left.\frac{\partial \hat{L}}{\partial\, dt/d\tau}\ \frac{dt(s)}{ds}\right|_{s=0} \tag{3.59}$$

が保存する。ここで、

$$\left.\frac{dt(s)}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{d(t+s)}{ds}\right|_{s=0} = 1 \tag{3.60}$$

である。

一方、$\hat{L}$ のもともとの定義式 (3.53) より、$X \equiv \dfrac{dq^k/d\tau}{dt/d\tau} = \dot{q}^k$ として、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{L}}{\partial dt/d\tau} &= \frac{\partial}{\partial\, dt/d\tau}\left[L\left(q^k, \frac{dq^k/d\tau}{dt/d\tau}, t\right)\frac{dt}{d\tau}\right] = \frac{\partial}{\partial\, dt/d\tau}\left[L\left(q^k, X, t\right)\frac{dt}{d\tau}\right] \\
&= \frac{dt}{d\tau}\frac{\partial}{\partial\, dt/d\tau}L\left(q^k, X, t\right) + L \\
&= \frac{dt}{d\tau}\ \frac{\partial X}{\partial\, dt/d\tau}\ \frac{\partial}{\partial X}L\left(q^k, X, t\right) + L
\end{aligned} \tag{3.61}$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial}{\partial X}L\left(q^k, X, t\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}L\left(q^k, \dot{q}^k, t\right) = p_k \tag{3.62}$$

である。また、$\hat{L}$ の定義式 (3.53) において、引数が $(t, q^k, dt/d\tau, dq^k/d\tau)$ となっていることから分かるように、$dt/d\tau$ と $dq^k/d\tau$ は独立であるから、

$$\frac{\partial X}{\partial\, dt/d\tau} = \frac{\partial}{\partial\, dt/d\tau}\left(\frac{dq^k/d\tau}{dt/d\tau}\right) = -\frac{dq^k/d\tau}{(dt/d\tau)^2} \tag{3.63}$$

となる。

以上をまとめると、

$$
\begin{aligned}
I = \frac{\partial \hat{L}}{\partial dt/d\tau}\left.\frac{dt(s)}{ds}\right|_{s=0} &= \frac{dt}{d\tau}\frac{\partial X}{\partial\, dt/d\tau}\frac{\partial}{\partial X}L\left(q^k, X, t\right) + L \\
&= \frac{dt}{d\tau}\left(-\frac{dq/d\tau}{(dt/d\tau)^2}\right)p_k + L = -\frac{dq^k/d\tau}{dt/d\tau}\,p_k + L \\
&= -\frac{dq^k}{dt}\,p_k + L = -\dot{q}^k p_k + L \\
&= -H
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

であるから、時間並進対称性がある場合には、ネーターの定理より、ハミルトニアンすなわちエネルギーが保存する。

3.4　発展：Maxwell 方程式のゲージ対称性

3.4.1　単位系

国際協定によって、電磁気学には MKSA 単位系を使うことが推奨されているが、電磁気学の理解のためは、電場と磁場が同じ次元を持ち、さらに光速度があらわに現れ、その役割があからさまになる単位系を使った方がよい。そのような単位系として cgs-Gauss 単位系がある。この節では両者の説明を行う*23。

MKSA 単位系

時間 [s]： ^{133}Cs を使った原子時計で決める。ある準位間の遷移からの放射の振動数を $\nu = 9,192,631,770$ Hz [1/s] と定義し、それにより 1 秒を定義する。

長さ [m]： 光速度を $c = 299,792,458$ m/s と定義して、原子時計から定義される 1s を使って、光が $1/299,792,458$ s の間に進む距離を 1m と定義する。

質量 [kg]： 国際キログラム原器の質量を 1kg とする。

電流 [A]： 電流と電流の間に働く力で決める。1m 離れた 1A の電流に単位長さあたりに働く力の大きさが 1N。

これ以外の物理量の単位はすべてこれらの組み合わせで定義される (ので MKSA 単位系と呼ばれる)。電磁気学にあらわれるものでは、

電荷 [C]： 電流 1A が 1s に運ぶ電荷が 1C。すなわち、[C] = [A·s]。

電場 [V/m]： まず、電位の単位を、1C の電荷を 1V の電位差にわたって運んだときの仕事が 1J であるとして [V]=[J/C] を定義し、電位の勾配によって電場を定義する。すなわち電場の単位は [V/m]=[N/C]。

磁場 (磁束密度) [T]=[V·s/m^2]： qC の電荷に働く力が $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ と表せるように磁場の単位を決める。これより、磁場の次元は電場の次元を速度の次元で割ったものになる。よって、[T]=[V·s/m^2]=[(N·s)/(C·m)]。

*23 さらに詳しく知りたい読者は https://home.hiroshima-u.ac.jp/kyam/pages/results/monograph/Ref01_unit43W.pdf を参照のこと。

Maxwell 方程式は

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho \tag{3.65}$$
$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \tag{3.66}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.67}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{3.68}$$

である。ここで電荷密度 ρ の次元は $[\mathrm{C/m^3}]$ であるから、真空の誘電率 ϵ_0 の次元は $[\mathrm{C^2/(N{\cdot}m^2)}]$ であり、電流密度 $\boldsymbol{j}$ の次元が $[\mathrm{C/(m^2{\cdot}s)}]$ であることから、真空の透磁率 μ_0 の次元は $[\mathrm{N/A^2}]$ である。これより、$1/(\epsilon_0\mu_0)$ は速度の 2 乗の次元を持ち、その大きさは光速度の 2 乗である。すなわち、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \tag{3.69}$$

cgs-Gauss 単位系

時間 [s]： 1s。
長さ [cm]： $1\mathrm{cm} = 10^{-2}\mathrm{m}$。
質量 [g]： $1\mathrm{g} = 10^{-3}\mathrm{kg}$。

cgs 単位系ではでは力の単位として dyn ($1\mathrm{dyn} = 10^{-5}\mathrm{N}$) を用いる。

電荷 [esu]： 電荷と電荷の間に働くクーロン力 $F = \dfrac{q_1 q_2}{r^2}$ から電荷の次元を決定する。すなわち、電荷の次元は、

$$[\mathrm{esu}] = \sqrt{\mathrm{dyn}}\cdot\mathrm{cm} = \sqrt{\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}}\cdot\mathrm{cm/s} \tag{3.70}$$

電場 [statvolt/cm]： 1esu の電荷により 1cm 離れた場所にできる電場を 1 statvolt/cm と定義する。
磁場 [gauss]： 電荷に働く力が

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{3.71}$$

となるように決める。速度が光速度で割られているので、電場と磁場は同じ次元を持つ。

cgs-Gauss 系では Maxwell 方程式に光速度 c が直接あらわれ、真空の誘電率と透磁率は 1 になる。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 4\pi\rho \tag{3.72}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{3.73}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.74}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{3.75}$$

以下、理論物理学でもっともよく用いられる、 cgs-Gauss 系を採用する。

3.4.2　ベクトルポテンシャルとゲージ変換

4 本の Maxwell 方程式のうち、まず

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$$

の組に着目する。ベクトル解析の知識から、$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ は、

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{3.76}$$

となるベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が存在することを意味する。この $\boldsymbol{A}$ **をベクトルポテンシャル**と呼ぶ。すなわち、**磁場 B はベクトルポテンシャルの回転で表される**。

(3.76) 式の証明： 任意のベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対して $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$ が恒等式となればよい。なぜならば、この場合には $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ に対して $\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ が自動的に満たされるので、ベクトル $\boldsymbol{B}$ の代わりにベクトル $\nabla \times \boldsymbol{A}$ を用いることが正当化されるからである。Levi-Civita 記号 ϵ_{ijk} を用いて証明する。

ベクトル場の回転は Levi-Civita 記号を用いて、

$$(\nabla \times \boldsymbol{A})^i = \epsilon^{ijk} \partial_j A_k \tag{3.77}$$

と表すことができる。この表式は添字の j と k については和がとられているので、自由な添字は i だけである。このベクトルの発散をとると、

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla_i (\nabla \times \boldsymbol{A})^i = \partial_i (\epsilon^{ijk} \partial_j A_k) = \epsilon^{ijk} \partial_i \partial_j A_k = 0 \tag{3.78}$$

となるので証明が完了する。ここで、ϵ^{ijk} の成分が定数であるので、$\partial_i \epsilon^{ijk} = 0$ である。また、Levi-Civita 記号に同じベクトルが 2 つ掛かって和がとられると 0 になることを用いた。

Levi-Civita 記号に同じベクトルが 2 つ掛かって和がとられると 0 になることは次のように証明できる。$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$ より、任意のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対して (微分演算子でもよい)、

$$\epsilon_{ijk} V^i V^j = \epsilon_{ijk} V^j V^i = -\epsilon_{jik} V^j V^i \tag{3.79}$$

である。ここで、最後の表式で j と i を入れ替える。これは

$$\begin{aligned} \epsilon_{jik} V^j V^i &= \sum_j \sum_i \epsilon_{jik} V^j V^i = \sum_l \sum_i \epsilon_{lik} V^l V^i = \sum_l \sum_j \epsilon_{ljk} V^l V^j \\ &= \sum_i \sum_j \epsilon_{ijk} V^i V^j \end{aligned} \tag{3.80}$$

とするようなものであるから、いつでも可能である。ただし、**式の中で**和のとられていない添字を勝手に変える場合には注意が必要である。また、$\sum_i \sum_i \epsilon_{iik} V^i V^i$ としてしまうと、わけが分からなくなるので、2 ヶ所以上で同じ和の添字は使ってはいけない。

すると、

$$\epsilon_{ijk} V^i V^j = -\epsilon_{ijk} V^i V^j \tag{3.81}$$

となるので、$\epsilon_{ijk} V^i V^j = 0$ である。これから、$V^i = \partial_i$ とすれば、ベクトル場の有名な公式 $\nabla \times \nabla f = 0$ も証明できる。

(3.76) の $\boldsymbol{A}$ は一意には定まらない。ベクトル解析が教えるように、任意のスカラー場 χ に対して

$$\nabla \times (\nabla \chi) = 0 \tag{3.82}$$

がいつでも成り立つので、

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla \chi \tag{3.83}$$

を用いても、

$$\nabla \times \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{B} \tag{3.84}$$

となり同じ磁場を与えるからである。このことを、**ベクトルポテンシャルには χ によるゲージ自由度がある**といい、変換 (3.83) をゲージ変換と呼ぶ。すなわち、ゲージ変換のもとで $\boldsymbol{B}$ は不変であり、**ゲージ対称性 (ゲージ不変性)** を持つ。

3.4.3　ゲージ対称性に関連した Maxwell 方程式

ベクトルポテンシャルを用いると、ファラデー (Faraday) の電磁誘導の法則は、

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0 \tag{3.85}$$

となるので、ベクトル解析の知識 (3.82) から、

$$-\nabla\phi=\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{3.86}$$

となるスカラー場 (スカラー関数) ϕ が存在することが分かる。この ϕ **をスカラーポテンシャル**と呼ぶ。したがって、電場はスカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを用いて、

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{3.87}$$

と表される。

スカラーポテンシャルは、ベクトルポテンシャルのゲージ自由度に対応して、次のゲージ自由度を持つ。

$$\phi\ \longrightarrow\ \phi'=\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{3.88}$$

実際、このゲージ変換によって、電場は

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\left(\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A}+\nabla\chi)=-\nabla\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{3.89}$$

となり不変である。

以上をまとめると、Maxwell 方程式

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{B}&=0\\ \nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}&=0\end{aligned}$$

は電磁場がスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ によって表すことができることを意味するが、$\phi,\boldsymbol{A}$ の決め方については何も教えない。ポテンシャル $\phi,\boldsymbol{A}$ にはゲージ自由度があり、ゲージ変換によって電磁場は不変である。

出席課題 S.3.7*：　任意のスカラー関数に対して、$\nabla\times\nabla f=0$ を示せ。

略解　$\epsilon^{ijk}\partial_j\partial_k f=\epsilon^{ijk}\partial_k\partial_j f=-\epsilon^{ikj}\partial_k\partial_j f=-\epsilon^{ijk}\partial_j\partial_k f$。よって $2\epsilon^{ijk}\partial_j\partial_k f=0$。

3.4.4　電荷・電流密度による電磁場の生成と Maxwell 方程式

次に、Maxwell 方程式

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E}&=4\pi\rho\\ \nabla\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}&=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

を考える。(Maxwell 方程式がその存在を保証している) スカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いれば、

$$\nabla\cdot\left(-\nabla\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=4\pi\rho \tag{3.90}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{3.91}$$

となる。ここで、ベクトル解析の公式

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = -\nabla^2 \boldsymbol{A} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \tag{3.92}$$

を用いると、

$$-\nabla^2 \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial(\nabla \cdot \boldsymbol{A})}{\partial t} = 4\pi\rho \tag{3.93}$$

$$-\nabla^2 \boldsymbol{A} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) + \frac{1}{c}\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{3.94}$$

となる。これは電荷密度 ρ と電流密度 $\boldsymbol{j}$ が与えられた場合にどのような電磁場 $\phi, \boldsymbol{A}$ が生成されるかを表す式である。

(3.92) 式の証明： これも Levi-Civita 記号が威力を発揮する問題である。次の公式は覚えておくと役に立つ。

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ilm} = \delta_j^l \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^l \tag{3.95}$$

この例では 1 番目の添字の i 同士の和がとられているが、Levi-Civita 記号の対称性から別の表現も可能である。例えば、

$$\epsilon_{ijk}\epsilon^{ilm} = \epsilon_{jki}\epsilon^{ilm} = \epsilon_{jik}\epsilon^{lim} = \epsilon_{jki}\epsilon^{lmi} = \epsilon_{ijk}\epsilon^{lmi} = \delta_j^l \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^l \tag{3.96}$$

そうでない場合には、Levi-Civita 記号では、添字の交換毎に (-1) がかかることに注意して、

$$\begin{aligned} \epsilon_{jik}\epsilon^{ilm} &= -\epsilon_{ijk}\epsilon^{ilm} = -\delta_j^l \delta_k^m + \delta_j^m \delta_k^l, \\ \epsilon_{jki}\epsilon^{ilm} &= -\epsilon_{jik}\epsilon^{lim} = \epsilon_{ijk}\epsilon^{lim} = -\delta_j^l \delta_k^m + \delta_j^m \delta_k^l \end{aligned}$$

などと適宜計算する。

この公式を用いると、まず $\nabla \times \boldsymbol{A} = \epsilon^{ijk}\partial_j A_k$ とすると、残っている添字は i だから、これを $B^i = \epsilon^{ijk}\partial_j A_k$ と書いておく。この添字 i は B がベクトル $\boldsymbol{B}$ であることを示すものであるから変えてよい。すると、

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla \times \boldsymbol{B} = \epsilon_{ijk}\partial^j B^k = \epsilon_{ijk}\partial^j(\epsilon^{klm}\partial_l A_m) \tag{3.97}$$

となる。ここで、B^k を代入する際に、添字がかぶらないにすることが重要である。

あとはこれを計算すると、

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) &= \epsilon_{ijk}\epsilon^{klm}\partial^j \partial_l A_m = (\delta_i^l \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^l)\partial^j \partial_l A_m \\ &= \partial^m \partial_i A_m - \partial^l \partial_l A_i = \partial_i \partial^m A_m - \partial^l \partial_l A_i \\ &= \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{3.98}$$

のように示すことができる。

ここで、$\rho, \boldsymbol{j}$ が与えられても、$\phi, \boldsymbol{A}$ は一意には定まらない。その理由の一つは、$\rho, \boldsymbol{j}$ がゼロの場合にも、ゼロでない $\phi, \boldsymbol{A}$ の解が存在することである。これが真空中を伝わる電磁波である。もう一つはゲージ自由度によるものである。具体的にゲージ変換の式を代入すれば分かるように、ゲージ変換によって方程式が不変だからである。電磁気学ではこのゲージ自由度を積極的に利用して方程式を簡略化する。

例えば、χ の 1 自由度を利用して、スカラー方程式 (1 自由度)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{3.99}$$

を満たすように $\boldsymbol{A}$ を選ぶことができる。

実際、はじめに

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} \neq 0$$

であったとしても、$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\chi$ の自由度を用いて、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{3.100}$$

とすることができる。そのためには、ポアソン方程式

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} + \nabla\chi) + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\chi = -\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) \neq 0 \tag{3.101}$$

の解として χ を選べばよい。

このゲージ条件をローレンスゲージ (Lorenz gauge) と呼ぶ。ローレンスゲージのもとでは、ϕ, $\boldsymbol{A}$ は波動方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi = 4\pi\rho \tag{3.102}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\boldsymbol{A} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{3.103}$$

に従う。

3.4.5　電磁場のゲージ対称性と電荷保存:初等的考察

電磁場における基本量は電場 $\boldsymbol{E}$ および磁場 $\boldsymbol{B}$ であるが、磁場は上述のようにゲージ変換で不変であり、電場もまた (3.89) 式で示されるようにゲージ変換で不変である。4 章で説明するハミルトニアン形式では、ハミルトニアン (エネルギー) によって物理系が記述されるが、電磁場のエネルギー密度が

$$E_{EM} = \frac{1}{8\pi}(E^2 + B^2) \tag{3.104}$$

で与えられたことを思い出せば、電場および磁場がゲージ不変であれば、エネルギーすなわちハミルトニアンもゲージ不変であり、したがって物理系にはゲージ変換に対する対称性があることが結論付けられる。

3 章で説明し, また 4 章でも別の観点から議論されるように、物理系に対称性がある場合にはそれに付随した保存量が存在する。したがって、電磁場の理論には、このゲージ対称性に付随した保存量が存在するはずである。実は**ゲージ対称性から導かれる保存則が電荷の保存**なのである。これを以下で説明しよう。

ゲージ対称性に付随する保存則が電荷の保存であることの考察

電磁場と荷電粒子の相互作用を含むラグランジアン[*24]

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 + \frac{q}{c}\,\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{A} - q\phi \tag{3.105}$$

をゲージ変換すると、

$$\begin{aligned} L' &= \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 + \frac{q}{c}\,\dot{\boldsymbol{x}} \cdot (\boldsymbol{A} + \nabla\chi) - q\left(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 + \frac{q}{c}\,\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{A} - q\phi + \frac{q}{c}\left(\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \nabla\chi + \frac{\partial \chi}{\partial t}\right) \\ &= L + \frac{q}{c}\frac{d\chi}{dt} \end{aligned} \tag{3.106}$$

[*24] 演習問題 3.5 参照。

となる。

ここで、電荷が保存する場合には

$$\frac{dq}{dt} = 0 \tag{3.107}$$

であるから、(3.106) 式は、さらに

$$L' = L + \frac{d}{dt}\left(\frac{q\chi}{c}\right) \tag{3.108}$$

と変形できる。演習問題 2.4 で示されたように、ラグランジアンには時間の全微分を加える自由度があるので L' と L は同じ物理系を表す。すなわち、電荷が保存すれば系にはゲージ対称性があることがいえる。完全な証明ではないが、この議論を逆にたどれば、ゲージ対称性があれば電荷が保存することが想像できるであろう[*25]。

3.A　3 章の演習問題

演習問題 3.1: (重要) 空間の等方性と角運動量の保存

空間に回転対称性があれば、その回転軸まわりの角運動量が保存することを示せ。

演習問題 3.2: (重要) 対称性と保存則

3.2.1: 1 次元調和振動子の時間並進対称性

1 次元調和振動子のラグランジアンを書き、これが微小変換 $x(t) \to x(t+s) = x + s\dot{x}$ (時間並進：s の 1 次まで) に対して、**時間の全微分の不定性を除いて**不変であることを示せ。これより保存量を導き、これがハミルトニアンとなることを示せ。

略解： 1 次元調和振動子のラグランジアンは

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{3.110}$$

ここで、m は粒子の質量、ω は振動数である。微小変換 $x(t) \to x(t+s) = x + s\dot{x}$ によるラグランジアンの変分は、微小パラメータ s の 1 次までで、

$$\delta L = L(x + s\dot{x}, (x + s\dot{x})^{\cdot}) - L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}s\left(2\dot{x}\ddot{x} - 2\omega^2 x\dot{x}\right) = s\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right)\right] \tag{3.111}$$

よって、変分は時間の全微分となるので、ラグランジアンは時間の全微分の不定性を除いて不変である。すなわち、ラグランジアンには時間並進対称性がある。
この場合、ネーターの定理 (3.47) 式において、$F = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$ として、

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{dx}{dt} - \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right) = m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{3.112}$$

が保存量となる。I はハミルトニアン (エネルギー) そのものである。すなわち、時間並進対称性がある 1 次元調和振動子系ではエネルギーが保存する。

[*25] より完全な議論のためには、電荷をもった体系を記述するために複素スカラー場 ψ, ψ^* を導入し、ψ に対するゲージ変換

$$\psi \to \psi' = e^{ia\chi}\psi, \qquad (a \text{ は実定数}) \tag{3.109}$$

も考慮する必要がある。興味がある学生は例えば、「理論電磁気学 (第 1 版)」砂川重信 (紀伊國屋書店) の 12 章 3 節を参照のこと (ただし、第 2 版以降ではこの節は削除されているので注意)。

3.2.2: 2 次元調和振動子の回転対称性

(2 次元) 調和振動子のラグランジアン $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$ は、z 軸まわりの微小回転 $x \to x - sy,\ y \to y + sx$ に対して不変であることを示せ。これより保存量を導き、角運動量が保存することを示せ。

略解： 具体的に計算すれば、s の 1 次までで

$$\delta L = L(x - sy, y + sx, (x - sy)^{\cdot}, (y + sx)^{\cdot}) - L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 0 \tag{3.113}$$

であることが示せる。すなわち、系には z 軸まわりの回転対称性がある。この場合、ネーターの定理 (3.42) 式より、$q^1 = x,\ q^2 = y$ として、

$$I = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\frac{dq^k}{ds} = \frac{\partial L}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial L}{\partial y}\frac{dy}{ds} = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p})_z = L_z \tag{3.114}$$

が保存量となるが、これは角運動量の z 成分である。すなわち、z 軸回転対称性がある (2 次元) 調和振動子系では (z 軸まわりの) 角運動量が保存する。

演習問題 3.3: (重要) 循環座標

1. 距離 $r = |\boldsymbol{x}|$ だけに依存するポテンシャル $U(r)$ がある場合の粒子のラグランジアンは 2 次元極座標 (r, θ) で

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - U(r) \tag{3.115}$$

となることを示せ。循環座標と保存量は何か。

ヒント： (1.92) を用いて $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ を計算して $L = (1/2)m|\boldsymbol{v}|^2 - U(r)$ に代入すれば (3.115) 式が得られる。循環座標は θ であり、θ に共役な運動量 p_θ が保存するが、具体的に計算すれば分かるように、p_θ は角運動量そのものである。

2. 距離 r に依存するポテンシャル $U(r)$ がある場合の粒子のラグランジアンは 3 次元極座標 (r, θ, φ) で

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - U(r) \tag{3.116}$$

となることを示せ。循環座標と保存量は何か。

ヒント： (1.111) を用いて $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ を計算する。あとは前問と同様。循環座標は φ であり、z 軸回りの角運動量 (φ に共役な運動量) が保存する。

演習問題 3.4: 熱力学における状態方程式と偏微分の関係式

熱力学量 (P, V, T) の間に状態方程式

$$f(P, V, T) = 0 \tag{3.117}$$

が成り立っているとする[*26]。すると、(3.117) 式という 1 つの関係式があるので、$P,\ V,\ T$ は他の 2 つの変数の関数 $P(V, T),\ V(P, T),\ T(P, V)$ とみることができる[*27]。

[*26] N モルの理想気体の状態方程式 $PV = NRT$ も $f(P, V, T) = PV - NRT = 0$ もとすればこの形に表すことができる。

[*27] 例えば、理想気体の状態方程式 $f(P, V, T) = PV - NRT = 0$ の場合、$P(V, T) = \dfrac{NRT}{V}$, $V(P, T) = \dfrac{NRT}{P}$, $T(P, V) = \dfrac{PV}{NR}$ である。

このとき、偏微分の関係式

$$\left(\frac{\partial P(V,T)}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V(P,T)}{\partial P}\right)_T = 1 \tag{3.118}$$

$$\left(\frac{\partial P(V,X)}{\partial V}\right)_X \left(\frac{\partial V(X,T)}{\partial T}\right)_X = \left(\frac{\partial P(T,X)}{\partial T}\right)_X \tag{3.119}$$

$$\left(\frac{\partial P(V,T)}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V(P,T)}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T(P,V)}{\partial P}\right)_V = -1 \tag{3.120}$$

が成り立つことを示せ*28。ここで、(3.119) 式の $X = X(P,V,T)$ は、内部エネルギー ($X = U$), エントロピー ($X = S$) などの熱力学量のいずれかであり、(P,V,T) の関数である*29。

略解：

(3.118) 式の証明：

温度 T 一定の環境下で成り立つべき関係式である。この場合、$dT = 0$ より

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV \tag{3.123}$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP \tag{3.124}$$

辺々掛け合わせて $dPdV$ で割れば、(3.118) 式が示される。

(3.119) 式の証明：

独立変数の変換 $P(V,T) \to P(V,X)$ について。状態方程式より $V = V(P,T)$ であるから、

$$X = X(P,V,T) = X(P,V(P,T),T) = X(P,T)$$

とみなすことができる。T について解けば $T = T(P,X)$ となる。これを $P = P(V,T)$ に代入して P について解けば、$P = P(V,X)$ を得る。同様に $V(P,T) \to V(X,T)$ とすることができる。

さて、(3.119) 式は熱力学量 X 一定の環境下で成り立つべき関係式である。$P(V,X)$, $V(X,T)$ の全微分において、$dX = 0$ より、

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_X dV + \left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_V dX = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_X dV \tag{3.125}$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)_T dX + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_X dT = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_X dT \tag{3.126}$$

第 2 式を第 1 式に代入すれば、

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_X \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_X dT \tag{3.127}$$

一方、$P = P(T,X)$ とみなせば、

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_X dT + \left(\frac{\partial P}{\partial X}\right)_T dX \overset{(dX=0)}{=} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_X dT \tag{3.128}$$

である。両式を等しいとおいて (3.119) 式が示される。

(3.120) 式の証明：

---

*28 (3.118), (3.119) 式は関係式の一例である。例えば、

$$\left(\frac{\partial T(P,V)}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial V(P,T)}{\partial T}\right)_P = 1 \tag{3.121}$$

$$\left(\frac{\partial T(X,V)}{\partial V}\right)_X \left(\frac{\partial V(P,X)}{\partial P}\right)_X = \left(\frac{\partial T(P,X)}{\partial P}\right)_X \tag{3.122}$$

のような関係式も成り立つ。

*29 ただし、状態方程式の存在により、例えば $X(P,V,T) = X(P(V,T),V,T) = X(V,T)$ のように、2 変数の関数に焼き直すことができる。

$P(V,T)$, $V(P,T)$ とみなすと、

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_T dT$$
$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$$

第 2 式を第 1 式に代入すると、

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP + \left[\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_T + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right] dT \tag{3.129}$$

となるが、(3.118) 式より右辺第 1 項は dP に等しい。
よって、

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = 0 \tag{3.130}$$

が成り立たなければならないが、$T = T(P,V)$ とみなして偏微分をとった $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$ を乗じると、

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = 0 \tag{3.131}$$

となる。左辺第 1 項に (3.118) 式を用いれば (3.120) 式が得られる。

演習問題 3.5: (重要) 電磁場中の粒子の運動

質量 m、電荷 q の荷電粒子のラグランジアン L は、cgs-Gauss 単位系で

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 + \frac{q}{c}\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{A} - q\phi \tag{3.132}$$

で与えられる。ϕ はスカラーポテンシャルである。

1. オイラーラグランジュ方程式から運動方程式を求めよ。
2. 共役運動量を求め、ハミルトニアンを書きくだせ。
3. 次の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{dA_i(x^k,t)}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\dot{x}^k + \frac{\partial A_i}{\partial t} = (\nabla A_i)\cdot\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial A_i}{\partial t} \tag{3.133}$$

4. 運動方程式が

$$m\ddot{x}_i = qE_i + \frac{q}{c}(\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B})_i \tag{3.134}$$

となることを示せ。ただし、

$$\boldsymbol{E} \equiv -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B} \equiv \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3.135}$$

である。

5. ハミルトニアンを求め、正準共役運動量を計算し、力学的運動量 $m\dot{\boldsymbol{x}}$ と比較せよ。

解説： 以下の解説を参考に、自分なりに理解して解答を作成すること。まず、ラグランジアンを x^i, $\dot{x}^i$ で微分すると

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = m\dot{x}_i + \frac{q}{c}A_i, \tag{3.136}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{q}{c}\dot{x}^k\partial_i A_k - q\partial_i\phi = \frac{q}{c}\dot{\boldsymbol{x}}\cdot(\partial_i\boldsymbol{A}) - q\partial_i\phi \tag{3.137}$$

である。これより、正準共役運動量 $\boldsymbol{p}$ は力学的運動量 $m\dot{\boldsymbol{x}}$ とは異なっていることがわかる。

また、オイラー・ラグランジュ (Euler-Lagrange) 方程式は

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial x^i} \implies m\ddot{x}_i + q\frac{dA_i}{dt} = -q\partial_i\phi + \frac{q}{c}\dot{\boldsymbol{x}}\cdot(\partial_i\boldsymbol{A}) \tag{3.138}$$

となる。ここで、

$$\frac{dA_i(x^k,t)}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{dt} + \frac{\partial A_i}{\partial t}\frac{dt}{dt} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\dot{x}^k + \frac{\partial A_i}{\partial t} = (\nabla A_i)\cdot\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial A_i}{\partial t} \tag{3.139}$$

である。

オイラー・ラグランジュ方程式に代入してベクトル解析の公式 (演習問題 3.4)

$$[\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})]_i = \boldsymbol{A}\cdot(\partial_i\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\,B_i \tag{3.140}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_i &= q\left[-\partial_i\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}\right] + \frac{q}{c}\dot{\boldsymbol{x}}\cdot[\partial_i\boldsymbol{A} - \nabla A_i] = qE_i + \frac{q}{c}\dot{\boldsymbol{x}}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})_i \\ &= qE_i + \frac{q}{c}(\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B})_i \end{aligned} \tag{3.141}$$

となり、正しいニュートンの運動方程式が得られる。ただし、

$$\boldsymbol{E} \equiv -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B}\equiv\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{3.142}$$

である。

ハミルトニアンは、

$$H = \dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{p} - L = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2 + q\phi \tag{3.143}$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + q\phi \tag{3.144}$$

である。定数 $1/c$ をベクトルポテンシャルの定義に吸収させれば、

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\phi \tag{3.145}$$

と表すこともできる。

演習問題 3.6: (加点問題) 積分因子と熱力学第 1 法則

準静的変化における熱力学第 1 法則

$$d'Q = dU + PdV \tag{3.146}$$

において、内部エネルギー U, 圧力 P 等の熱力学量一般が経験温度 θ[*30]と体積 V の **2 変数に依存する場合**[*31]に、$dU + PdV$ を全微分とする積分因子が存在することを示せ。

略解と解説： $U = U(\theta, V)$ の場合、準静的**断熱変化**では、

$$0 = dU + PdV = \left(\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)_V d\theta + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_\theta + P\right]dV \tag{3.147}$$

である。これを

$$f(\theta,V)d\theta + g(\theta,V)dV = 0 \tag{3.148}$$

[*30] 熱力学第 0 法則によって温度の存在が保証されるが、これは絶対温度 T とは異なっていてもよい。絶対温度とはちがう温度を総称して経験温度と呼ぶ。ちなみに、(状態量である) 内部エネルギー U の存在を保証しているのが熱力学第 1 法則であり、(状態量である) エントロピー S の存在を保証しているのが熱力学第 2 法則である。

[*31] 2 変数に依存する、という条件は重要である。3 変数以上の場合には以下の議論は適用できない。実際、3 変数以上の場合に積分因子とエントロピーの存在をいうためには熱力学第 2 法則が必要になる (演習問題 4.8)。

と書くことにする。

これより

$$\frac{dV}{d\theta} = -\frac{f(\theta, V)}{g(\theta, V)} \tag{3.149}$$

となるが、(θ, V) 平面に 1 つの点 $X(\theta_0, V_0)$ を与えれば、X から (3.149) 式によって**一意的に定まる方向**に微小距離 $d\theta$ 進むことで次の点 X' にたどり着き、そこで (3.149) 式によって新たな方向を決めて微小距離進み、ということを繰り返すと、(θ, V) 平面に 1 つの曲線

$$S(\theta, V) = c_0 = (\text{定数}) \tag{3.150}$$

が得られる[*32]。

出発点 (初期条件)X をいろいろと変えると、c_0 の値も変わり、いろいろな曲線群

$$S(\theta, V) = c = (\text{一定}) \tag{3.151}$$

が得られるが、常微分方程式の解の一意性により、これらの曲線群が交わることはない。実際、曲線群が交わる点 Y があったとすると、そこでは 2 つの方向が存在することになってしまうが、これは (3.149) 式によって方向が一意的に定まることに矛盾する。

さて、(3.151) 式を微分すると、

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial S}{\partial V} dV = 0 \tag{3.152}$$

となるが、(3.148) 式と比較すれば、

$$T\frac{\partial S}{\partial \theta} = f, \qquad T\frac{\partial S}{\partial V} = g \tag{3.153}$$

となる T の存在が言える[*33]。これより、

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial S}{\partial V} dV = \frac{1}{T}\big(f(\theta, V)d\theta + g(\theta, V)dV\big) = \frac{1}{T}\big(dU + PdV\big) \tag{3.154}$$

すなわち、$dU + PdV$ を全微分とする積分因子 $1/T$ の存在が言える。

この S が状態量となっていることは、上で示したように $S = (\text{一定})$ が交わらないことから言える。この S をエントロピーと呼ぶ。

積分因子の T を絶対温度 (熱力学温度) としてよいことは、カルノーサイクルの効率の評価 (カルノーの定理) など、さらなる考察が必要である。

演習問題 3.7: (加点問題) 拡張されたネーターの定理の証明

講義ノートを参考に、ラグランジアンに時間の全微分を加える自由度があることを考慮した場合も含めて、ネーターの定理を示せ。式変形はけっこう手強い。なるべく丸写しにならないように試みること。

演習問題 3.8: (加点問題) 電磁場のゲージ変換と電荷保存

講義ノートを参考に、電磁場のゲージ変換と電荷保存の関係について論ぜよ。

[*32] 出席課題 S.1.4 参照

[*33] 方向だけ合っていればいいので、大きさの不定性として T が残る

第 4 章

位相空間とハミルトン形式

第 1 章で説明したハミルトンの原理 (最小作用の原理) では、経路 (位置) $q(t)$ の汎関数である作用 $S[q]$ において、$q(t) \to q(t) + \delta q(t)$ の仮想的な変化を考え、作用の変分 $\delta S = S[q + \delta q] + S[q]$ をとり、極値条件 $\delta S = 0$ からオイラー・ラグランジュ方程式を導いた。その際、速度 $\dot{q}$ については、経路 q とは独立のものとはせずに、経路の変分 δq に応じて $\delta \dot{q}$ が決まるものとしていた。

これに対して、速度 $\dot{q}$、あるいは速度に同等な共役運動量 p を、経路 q と独立なものとして取り扱った場合に、ハミルトンの原理から導かれる方程式はどのようなものであろうか。また、その場合の方程式の共変性、および対称性と保存則の関係はどうなるであろうか。これらが本章でとりあつかうテーマである。

このように、位置座標 q とその共役運動量 p を独立なものとして理論を構築するやり方を**ハミルトン形式**と呼ぶ。一方、1–3 章における、位置座標だけに基づく手法を**ラグランジュ形式**という。

4.1 位相空間とハミルトン方程式

4.1.1 位相空間 (phase space)

粒子系の状態は、すべての粒子 i の位置 $q^k_{(i)}$ と速度 $\dot{q}^k_{(i)}$ を指定[*1]すれば決定される[*2]。以下、1 粒子の場合を考えるが、多粒子系への拡張は容易である[*3]。ここで速度と同等な (共役) 運動量 p_k を用いてもよい[*4]。すると、位置 q^k と共役運動量 p_k, $(k = 1, 2, 3)$ を直交軸とするような 6 次元の空間を考えれば、その空間の 1 点が粒子の状態に対応することになり、粒子の運動は、この 6 次元空間上の軌跡となる。

位相空間 (phase space)

位置 q^k と共役運動量 p_k, $(k = 1, 2, 3)$ を直交軸とする空間を、**位相空間 (phase space)** とよぶ。物理系の運動を、位相空間における軌道とみなして、ハミルトンの原理に基づいて解析する手法を**ハミルトン形式**という

粒子の位置空間における運動と、位相空間における軌道の対応関係の例として、1 次元調和振動子を考え

[*1] ここで、$q^k_{(i)}$, $\dot{q}^k_{(i)}$ の下付き添字 (i) は粒子のラベルをあらわし、上付き添字 k は座標のラベル (x, y, z 等) を表す。
[*2] 実際、ニュートンの運動方程式、オイラーラグランジュ方程式は、粒子の位置座標 q に関する時間について 2 階の微分方程式であるから、位置と速度 (位置の 1 回微分) を決めれば時間発展を追跡可能である。
[*3] 自ら拡張できるように納得しておくこと。
[*4] 実際、ニュートンの運動方程式は $ma = f$ とするよりも、運動量の変化が力である ($\dot{p} = f$) とみなした方が適用範囲が広い。

よう。全エネルギーは、運動エネルギーとバネの弾性エネルギーの和であるから、

$$E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \tag{4.1}$$

である。ここで、q はバネの釣り合いの位置を原点としたときの座標であり、$k \equiv m\omega^2$, $p = m\dot{q}$ とおいた。時刻 $t = 0$ にバネを $q = q_0$ だけ伸ばして手を離すと、粒子は角振動数 ω の単振動をする。系の全エネルギーは $E = \frac{1}{2}m\omega^2 q_0^2$ である。

この運動を位相空間で見るために、$X = q$, $Y = p$ として (4.1) 式を書き換えると、

$$\frac{m\omega^2}{2E}X^2 + \frac{1}{2mE}Y^2 = 1 \tag{4.2}$$

となる。これと楕円の方程式 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を比べると、調和振動子の運動は、位相空間上では、位置 q の長軸半径が $\sqrt{2E/(m\omega^2)}$、運動量 p の長軸半径が $\sqrt{2mE}$ の楕円軌道を描くことが分かる。すなわち、1 次元調和振動子の位相空間上の軌道は楕円軌道である。

出席課題 S.4.1： 次の運動の位相空間 (q, p) における概形を描け。粒子の質量を m とする。

1. エネルギー E をもって運動している 1 次元自由粒子の運動。
2. はじめに位置 q_0 に静止していた粒子の 1 次元自由落下運動。

略解
1. $p_0 \equiv \sqrt{2mE}$ を通る q 軸に平行な直線。
2. $p = -mgt$, $q = q_0 - gt^2/2$ より、

$$q = q_0 - \frac{1}{2m^2 g}p^2 \tag{4.3}$$

これを適切な (q, p) の範囲でプロットすればよい。

4.1.2 位相空間上のハミルトンの原理とハミルトン方程式

位相空間では、位置 q^k と共役運動量 p_k を独立に扱う。ラグランジアンは $(q^k, \dot{q}^k, t)$ の関数であるから、それを微分して得られる共役運動量も $(q^k, \dot{q}^k, t)$ の関数であり、

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q^k, \dot{q}^k, t) \equiv p_i(q^k, \dot{q}^k, t) \tag{4.4}$$

である。ここで、この方程式が $\dot{q}^k$ について解けたとすると、

$$\dot{q}^k = \dot{q}^k(q^i, p_i, t) \implies \dot{q}^i = \dot{q}^i(q^k, p_k, t) \tag{4.5}$$

のように、$\dot{q}^i$ を (q^k, p_k, t) の関数として表すことができる[*5]。すると、ラグランジアンを

$$L\big(q^i, \dot{q}^i(q^k, p_k, t), t\big) \implies L(q^k, p_k, t) \tag{4.6}$$

のように (q^k, p_k, t) の関数として表すことができる。

ハミルトニアンの定義

$$H(q^k, p_k, t) = [\dot{q}^i p_i - L](q^k, p_k, t) \tag{4.7}$$

より[*6]、

$$L(q^k, p_k, t) = [\dot{q}^i p_i - H](q^k, p_k, t) \tag{4.8}$$

[*5] 一般にはこのように逆に解ける保証はない。
[*6] ここで、$\dot{q}^i p_i - L$ が (q^k, p_k, t) の関数であることをまとめて $[\dot{q}^i p_i - L](q^k, p_k, t)$ とあらわした。

である。ここで、右辺の $[\cdots](q^k, p_k, t)$ は $[\cdots]$ が q^k, p_k, t の関数であることを意味する。調和振動子の例で見たように、ハミルトニアン (エネルギー) は位相空間における定式化との相性がよいので、ラグランジアンを (4.8) のようにハミルトニアンを用いて表すことにする。

位相空間におけるハミルトンの原理は、作用が、位置と運動量両方の汎関数 $S[q^k, p_k]$ であるから、

$$\begin{aligned} 0 = \delta S[q^k, p_k] &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big[\dot{q}^k p_k - H(q^k, p_k, t) \Big] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \Big[(\delta \dot{q}^k) p_k + \dot{q}^k (\delta p_k) - \frac{\partial H}{\partial q^k} \delta q^k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \delta p_k \Big] dt \end{aligned} \tag{4.9}$$

となる。$(\delta \dot{q}^k) p_k$ の項について部分積分を行い、δq^k, δp_k でくくると、

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left\{ \dot{q}^k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right\} \delta p_k - \left\{ \dot{p}_k + \frac{\partial H}{\partial q^k} \right\} \delta q^k \right] dt \tag{4.10}$$

を得る。位相空間におけるハミルトンの原理は、位相空間上の軌道を微少量だけ動かすことに対応するので、δq^k, δp_k を独立に変分することが可能である。

ハミルトン方程式 (Hamilton's equation)

任意の変分 δq^k, δp_k に対して $\delta S = 0$ が成り立つためには、

$$\dot{q}^k = \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \tag{4.11}$$

$$\dot{p}_k = \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^k} \tag{4.12}$$

が成り立っていなければならない。これを**ハミルトン方程式**と呼ぶ。ハミルトン方程式を満たす変数の組 (q^k, p_k) を**正準変数**と呼ぶ。

出席課題 S.4.2*： 位相空間におけるハミルトンの原理からハミルトン方程式を導け。

4.1.3　発展：ラグランジアンの変数変換とハミルトン方程式

ハミルトン方程式を、ラグランジアンの変数変換 (とオイラーラグランジュ方程式) から導出することは、多変数関数の難しさを知る恰好の題材である[*7]。

ラグランジアン $L(q^k, \dot{q}^k, t)$ の変分は、

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta \dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t = \frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + p_k \delta \dot{q}^k + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \\ &= \frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k + \delta (p_k \dot{q}^k) - \dot{q}^k \delta p_k + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \end{aligned} \tag{4.13}$$

である。これより、

$$\delta \big(p_k \dot{q}^k - L \big) = -\frac{\partial L}{\partial q^k} \, \delta q^k + \dot{q}^k \, \delta p_k - \frac{\partial L}{\partial t} \, \delta t = -\dot{p}_k \, \delta q^k + \dot{q}^k \, \delta p_k - \frac{\partial L}{\partial t} \, \delta t \tag{4.14}$$

[*7] 自身のある人は下記の「数学的により厳密な議論」を追ってみること。もしも何の疑問もなくすらすらと読みこなせたらすばらしい。

となる。ここでオイラーラグランジュ方程式 (3.4) を用いた。

一方、ハミルトニアン $H(q^k, p_k, t)$ の変分は、

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q^k}\,\delta q^k + \frac{\partial H}{\partial p_k}\,\delta p_k + \frac{\partial H}{\partial t}\,\delta t \tag{4.15}$$

であり、$H = p_k\dot{q}^k - L$ と定義されているから、(4.14) 式、(4.15) 式を見比べると、ハミルトン方程式

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k} \tag{4.16}$$

が得られる。

もし、$\dot{q}^k$ が $\dot{q}^k = \dot{q}^k(q^k, p_k, t)$ のように表せていて、ラグランジアンを $L(q^k, \dot{q}^k(q^k, p_k, t), t) = L(q^k, p_k, t)$ のように (q^k, p_k, t) の関数として表す方法を知っていれば、上記の議論はそのままで概ね成り立つ。しかし、そうでない一般の場合には上記の議論は成り立たない[*8]。

数学的にきちんとした議論

上記の議論を必要に応じて引数をあらわに書いて慎重に繰り返す。ラグランジアン $L(q^k, \dot{q}^k, t)$ の変分は、

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q^k}\delta q^k + \delta(p_k\dot{q}^k) - \dot{q}^k\delta p_k + \frac{\partial L}{\partial t}\delta t \tag{4.17}$$

であり、これより、ここでオイラーラグランジュ方程式を用いて、

$$\delta\big(p_k\dot{q}^k - L\big) = -\dot{p}_k\,\delta q^k + \dot{q}^k\,\delta p_k - \frac{\partial L}{\partial t}\,\delta t \tag{4.18}$$

となる。これより、もともと $(q^i, \dot{q}^i, t)$ の関数であった $H = p_k\dot{q}^k - L$ は、

$$H\big(\,q^k, p_k(q^i, \dot{q}^i, t), t\,\big) = \dot{q}^k p_k(q^i, \dot{q}^i, t) - L(q^i, \dot{q}^i, t) \tag{4.19}$$

より、(q^k, p_k, t) の関数とみなすことができる。

これを L について解いて、

$$L(q^i, \dot{q}^i, t) = \dot{q}^k p_k(q^i, \dot{q}^i, t) - H\big(\,q^k, p_k(q^i, \dot{q}^i, t), t\,\big) \tag{4.20}$$

さらに $\dot{q}^i$ で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} &= p_k\frac{\partial \dot{q}^k}{\partial \dot{q}^i} + \frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}^i}\dot{q}^k - \frac{\partial H}{\partial \dot{q}^i} = p_k\delta^k_i + \dot{q}^k\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right) - \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}^i}\\ &= p_i + \left(\dot{q}^k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\dot{q}^k}\end{aligned} \tag{4.21}$$

となる。ここで共役運動量の定義を使った。

共役運動量の関係式 $p_i = \partial L/\partial \dot{q}^i$ が成り立つためには、

$$\left(\dot{q}^k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right)\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i\dot{q}^k} = 0 \tag{4.22}$$

[*8] 少なくとも何かおかしそうなところがないか、自身で考えてみよう。

でなければならない。これは、

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \dot{q}^1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \dot{q}^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \dot{q}^3} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2 \dot{q}^1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2 \dot{q}^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2 \dot{q}^3} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^3 \dot{q}^1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^3 \dot{q}^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^3 \dot{q}^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}^1 - \dfrac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dot{q}^2 - \dfrac{\partial H}{\partial p_2} \\ \dot{q}^3 - \dfrac{\partial H}{\partial p_3} \end{bmatrix} = 0 \tag{4.23}$$

なる連立方程式だから[*9]、$\det \left[\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \dot{q}^k} \right] \neq 0$ ならば、

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}(q^i, p_i, t) \tag{4.24}$$

となって、一意的に $\dot{q}^k$ が (q^i, p_i, t) の関数として表される。

(4.20) 式を q^i で微分すると、

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \dot{q}^k \frac{\partial p_k}{\partial q^i} - \left.\frac{\partial H}{\partial q^i}\right|_{p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial q^i} = - \left.\frac{\partial H}{\partial q^i}\right|_{p_i} + \frac{\partial p_k}{\partial q^i}\left(\dot{q}^k - \frac{\partial H}{\partial p_k}\right) \tag{4.25}$$

となる。ここで $|_{p_i}$ は p_i をとめた偏微分であることを示す。一意的に $\dot{q}^k(q^i, p_i, t)$ が求まっていれば、(4.24) 式を代入して、

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = - \left.\frac{\partial H}{\partial q^i}\right|_{p_i} \tag{4.26}$$

である。

これをオイラー・ラグランジュ方程式に代入すると

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}(q^i, p_i, t) \tag{4.27}$$

となり、(4.24) 式と合わせて、ハミルトン方程式

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k} \tag{4.28}$$

が得られたことになる。

4.2　正準変換：ハミルトン方程式の共変性

2.2 節で示したように、オイラー・ラグランジュ方程式は**位置座標**の一般座標変換 (点変換と呼ぶ) にたいして共変的であった。これに対し、ハミルトン方程式の変換は、位置と運動量を合わせた位相空間上の変換になる。ハミルトン方程式はどのような変換に対して共変性を満たすであろうか。

[*9] (4.23) 式に表れる行列 $\left[\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \dot{q}^k} \right]$ をヘッセ行列あるいはヘッシアン (Hessian matrix) という (より正確にはラグランジアン L の変数 $\dot{q}^i$ に関するヘッセ行列)。

4.2.1　正準変換とその母関数

いま、ある正準変数 (q^k, p_k) がハミルトン方程式を満たしているとして、変換

$$Q^k = Q^k(q^i, p_i, t), \qquad P_k = P_k(q^i, p_i, t) \tag{4.29}$$

を考える。

正準変換 (canonical transformation)

新しい変数 (Q^k, P_k) が正準変数となる、すなわち、新しいハミルトニアン $H'(Q^k, P_k)$ についてもハミルトン方程式

$$\dot{Q}^k = \frac{\partial H'}{\partial P_k}, \qquad \dot{P}_k = -\frac{\partial H'}{\partial Q^k} \tag{4.30}$$

が満たされるとしよう。このような変換を**正準変換 (canonical transformation)** と呼ぶ。ハミルトン方程式は、この正準変換に対して共変性を持つ。

ハミルトン方程式が、位相空間上のハミルトンの原理から導かれたことを考えると、

$$0 = \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big[\dot{q}^k p_k - H(q^k, p_k, t)\Big] dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \Big[\dot{Q}^k P_k - H'(Q^k, P_k, t)\Big] dt \tag{4.31}$$

が同時に成り立つような変換を考えればよい。演習問題 2.4 より*10、ラグランジアンに任意関数の時間の全微分を加える自由度があることを考慮すると、

正準変換の母関数 (generating function)

$$\dot{q}^k p_k - H(q^k, p_k, t) = \dot{Q}^k P_k - H'(Q^k, P_k, t) + \frac{dW}{dt} \tag{4.32}$$

であれば (Q^k, P_k) は正準変数となり、H' についてのハミルトン方程式を満たす。この W を正準変換の**母関数 (generating fucntion)** と呼ぶ。

4.2.2　正準変換の種類とルジャンドル変換

正準変換の母関数 W がどのような**引数**をとるかによって、正準変換は 4 つのタイプに分けられる。

正準変換 I： 引数が q^i, Q^i の場合 $(W = W_1(q^i, Q^i, t))$

(4.32) 式を書き換えれば、

$$dW = p_k dq^k - P_k dQ^k + \Big[H'(Q^k, P_k, t) - H(q^k, p_k, t)\Big] dt \tag{4.33}$$

を得る。

ここで、(4.33) 式の右辺にあらわれる dq^k, dQ^k, dt は、W の引数を $W = W(q^k, Q_k, t)$ としていることと整合的である*11。この W を改めて W_1 とあらわすことにする。すなわち、$W_1 = W_1(q^k, Q_k, t)$ である。

*10 この問題に取り組んでいない場合、あるいは解くことができていない場合には、参考書で調べるなりして必ず解いておくこと。
*11 なぜならば、この場合に W の全微分を考えると

$$dW = \frac{\partial W}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial W}{\partial Q^k} dQ^k + \frac{\partial W}{\partial t} dt \tag{4.34}$$

W_1 を微分すれば、

$$dW_1 = \frac{\partial W_1}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial W_1}{\partial Q^k} dQ^k + \frac{\partial W_1}{\partial t} dt \tag{4.35}$$

であるから、これと (4.33) 式を比べると、

正準変換 I:

$$p_k = \frac{\partial W_1(q^i, Q^i, t)}{\partial q^k} \tag{4.36}$$

$$P_k = -\frac{\partial W_1(q^i, Q^i, t)}{\partial Q^k} \tag{4.37}$$

$$H'(Q^i, P_i, t) = H(q^i, p_i, t) + \frac{\partial W_1(q^i, Q^i, t)}{\partial t} \tag{4.38}$$

が得られる。

すると、W_1 **の具体形が与え**られれば、次のようにして**変換後の** Q^k, P_k, H' **を求めることができる**ので、関数 W_1 を**正準変換の母関数と呼ぶ**のである。

1. W_1 を与える。
2. $p_k = \dfrac{\partial W_1}{\partial q^k}(q^i, Q^i, t)$ を Q^i について解くことによって、Q^i が (q^i, p_i, t) の関数として求まる。
3. 得られた Q^i を $P_k = -\dfrac{\partial W_1}{\partial Q^k}(q^i, Q^i, t)$ に用いれば、P_k が (q^i, p_i, t) の関数として求る。
4. 同様に H' も (q^i, p_i, t) の関数として求まる。

正準変換 II： 引数が q^i, P_i **の場合** $(W = W_2(q^i, P_i, t) = W_1 + P_k Q^k)$

等式 $d(P_k Q^k) = Q^k dP_k + P_k dQ^k$ を用いて、(4.33) 式の dQ^k を dP_k に変えることを考えよう。

$$dW_1 = p_k dq^k - d(P_k Q^k) + Q^k dP_k + \Big[H'(Q^k, P_k, t) - H(q^k, p_k, t)\Big] dt \tag{4.39}$$

ここで $d(P_k Q^k)$ を左辺に移項すれば、

$$d\big(W_1 + P_k Q^k\big) = p_k dq^k + Q^k dP_k + \Big[H'(Q^k, P_k, t) - H(q^k, p_k, t)\Big] dt \tag{4.40}$$

となるが、この式は $W_2 = W_1 + P_k Q^k$ が引数 (q^k, P_k, t) の関数となることを意味している。これを $W_2(q^k, P_k, t)$ とあらわそう。

このように、全微分の式をもとにして、ある関数から、それとは引数の違う別の関数を作り出す操作[*12]を**ルジャンドル変換**という[*13]。

この場合、母関数 W_2 の全微分は

$$dW_2 = \frac{\partial W_2}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial W_2}{\partial P_k} dP_k + \frac{\partial W_2}{\partial t} dt \tag{4.41}$$

となるから、これと (4.40) 式を比べれば、母関数 W_2 から誘導される変換

となって、やはり右辺に dq^k, dQ^k, dt があらわれるからである。

[*12] $d(fg) = gdf + fdg$ を用いる

[*13] ルジャンドル変換の意味については補足 4.4 節参照。

正準変換 II:

$$p_k = \frac{\partial W_2(q^i, P_i, t)}{\partial q^k} \tag{4.42}$$

$$Q^k = \frac{\partial W_2(q^i, P_i, t)}{\partial P_k} \tag{4.43}$$

$$H'(Q^i, P_i, t) = H(q^i, p_i, t) + \frac{\partial W_2(q^i, P_i, t)}{\partial t} \tag{4.44}$$

によって、変換後の Q^k, P_k, H' を求めることができる。

さらにルジャンドル変換を行うことによって、また違った正準変換を考えることができる。以下に示す、正準変換 III, IV の導出は出席課題とする (S.4.4)。

正準変換 III： 引数が p_i, Q^i の場合 ($W = W_3(p_i, Q^i, t) = W_1 - p_k q^k$)

$$q^k = -\frac{\partial W_3(p_i, Q^i, t)}{\partial p_k} \tag{4.45}$$

$$P_k = -\frac{\partial W_3(p_i, Q^i, t)}{\partial Q^k} \tag{4.46}$$

$$H'(Q^i, P_i, t) = H(q^i, p_i, t) + \frac{\partial W_3(p_i, Q^i, t)}{\partial t} \tag{4.47}$$

正準変換 IV： 引数が p_i, P_i の場合 ($W = W_4(p_i, P_i, t) = W_1 - p_k q^k + P_k Q^k$)

$$q^k = -\frac{\partial W_4(p_i, P_i, t)}{\partial p_k} \tag{4.48}$$

$$Q^k = +\frac{\partial W_4(p_i, P_i, t)}{\partial P_k} \tag{4.49}$$

$$H'(Q^i, P_i, t) = H(q^i, p_i, t) + \frac{\partial W_4(p_i, P_i, t)}{\partial t} \tag{4.50}$$

出席課題 S.4.3： 正準変換は、2 章で議論した「通常の座標変換」を含むより広い変数変換となっていることを示せ。

略解： 正準変換 II で「通常の座標変換」になる変換が存在することを具体的に示せばよい。座標の任意関数 Q^j を用いて

$$W_2(q^i, P_i, t) = Q^j(q^i) P_j \tag{4.51}$$

とすると、(4.43) 式より、

$$Q^k = \frac{\partial W_2}{\partial P_k} = Q^j(q^i)\delta^k_j = Q^k(q^i) \tag{4.52}$$

であるから、座標については通常の座標変換となっている。
一方、共役運動量が満たすべき変換則は、(2.43) 式より[*14]、

$$P_k = \frac{\partial q^j}{\partial Q^k} p_j \tag{4.53}$$

である。正準変換 (4.51) に対してこれが成り立っていることを示そう。(4.42) 式より、

$$p_k = \frac{\partial W_2}{\partial q^k} = \frac{\partial Q^j}{\partial q^k} P_j \tag{4.54}$$

[*14] 共役運動量の定義を用いれば直ちに示せる。3.1.2 節参照。

であるが、ここで両辺に $\partial q^k/\partial Q^i$ を作用させると、

$$\frac{\partial q^k}{\partial Q^i}\,p_k = \frac{\partial q^k}{\partial Q^i}\frac{\partial Q^j}{\partial q^k}P_j \overset{(1.73)}{=} \delta^j_i P_j = P_i \tag{4.55}$$

よって、(4.53) 式が成り立つ[*15]。

出席課題 S.4.4： ルジャンドル変換によって、正準変換 III および IV を導け。

4.2.3　無限小正準変換と生成子

この節では、正準変換 II のタイプの母関数 W_2 を考える。特に、

$$W_2 = P_k q^k \tag{4.56}$$

とすると、(4.42), (4.43) 式より、これは恒等変換 $Q^k = q^k$, $P_k = p_k$ を表す。そこで、ϵ を微小パラメータとして、

無限小正準変換とその生成子

恒等変換からの微小なずれをあらわす**無限小正準変換**を、

$$W_2(q^i, P_i, t) = P_k q^k + \epsilon G(q^i, P_i, t) \tag{4.57}$$

で定義する。ここで、恒等変換からのずれを特徴づける関数 G を**無限小正準変換の生成子**という。

無限小正準変換によって、(Q^k, P_k) は、(4.42), (4.43) 式より、

$$Q^k = \frac{\partial W_2}{\partial P_k} = q^k + \epsilon\frac{\partial G(q^i, P_i, t)}{\partial P_k} \tag{4.58}$$

$$p_k = \frac{\partial W_2}{\partial q^k} = P_k + \epsilon\frac{\partial G(q^i, P_i, t)}{\partial q^k} \quad \Rightarrow \quad P_k = p_k - \epsilon\frac{\partial G(q^i, P_i, t)}{\partial q^k} \tag{4.59}$$

にしたがって変換する。ここで、ϵ の 1 次までの範囲では、P_i を p_i に変えても、その違いは ϵ の 2 次であるから影響しない (出席課題 S.4.5 と演習問題 4.5)。よって、1 次の微小量までの議論の範疇では、P_i を p_i に変えることができる。すなわち、

生成子 $G(q^i, p_i)$ による無限小正準変換 $(q^k, p_k) \to (Q^k, P_k)$

無限小正準変換では、(Q^k, P_k) は

$$Q^k = q^k + \epsilon\frac{\partial G(q^i, p_i, t)}{\partial p_k} \tag{4.60}$$

$$P_k = p_k - \epsilon\frac{\partial G(q^i, p_i, t)}{\partial q^k} \tag{4.61}$$

によって変換するとしてよい。

なぜこのようなことを考えたかというと、もともとの (4.58), (4.59) 式では、正準変換を考えるためには生成子 $G(q^i, P_i, t)$ を与える必要があるが、その引数に変換後の変数 P_i が用いられているからである。この

[*15] 添字は違うが本質的に同等の式であることに注意。

P_i は生成子 G を与えないと決まらないが、その生成子の引数に P_i が先取りする形で含まれてしまっている。一方、(4.60), (4.61) 式では、生成子 G を変換前の (q^k, p_k) の関数として与えればよいので、このような面倒が生じないからである。

出席課題 S.4.5 :　無限小正準変換 (4.59) において、ϵ の 1 次までの範囲では、生成子 G の引数 P_i を p_i に変えても、その違いは ϵ の 2 次の効果となることを示せ。従って、ϵ の 1 次までしか考慮しない場合には、p_k の変換において G の引数の P_i を p_i に変えることができる。

略解　$G(q^i, P_i, t)$ に P_k を代入してテイラー展開する。

$$G\left(q^i, P_k, t\right) = G\left(q^i, p_k - \epsilon\frac{\partial G}{\partial q^k}, t\right) = G\left(q^i, p_k, t\right) - \epsilon\frac{\partial G}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q^k} + O(\epsilon^2) \tag{4.62}$$

これを q^k で偏微分すると、

$$\frac{\partial G(q^i, P_i, t)}{\partial q^k} = \frac{\partial G(q^i, p_i, t)}{\partial q^k} + O(\epsilon) \tag{4.63}$$

となるから、両者の違いは ϵ の 1 次である。これを無限小正準変換 (4.59) に代入すると

$$p_k = P_k + \epsilon\left[\frac{\partial G(q^i, p_i, t)}{\partial q^k} + O(\epsilon)\right] = P_k + \epsilon\frac{\partial G(q^i, p_i, t)}{\partial q^k} + O(\epsilon^2) \tag{4.64}$$

となり (4.61) 式が得られる。(4.60) 式を (まじめに) 示すのは少し複雑である (演習問題 4.5)。

4.3　対称性と保存則

4.3.1　正準変換の微分方程式表示

ここでまでの議論は ϵ が微小であるとする制限の下でのものであったが、次のようにして、無限小という制限のない一般の正準変換に場合に拡張することができる。まず、必ずしも微小でないパラメータ s を導入して、無限小正準変換 (4.60), (4.61) を

$$q^k(s) = q^k(0) + s\frac{\partial G(q^i, p_i, t)}{\partial p_k} + O(s^2) \tag{4.65}$$

$$p_k(s) = p_k(0) - s\frac{\partial G(q^i, p_i, t)}{\partial q^k} + O(s^2) \tag{4.66}$$

のように書き換えよう。ここで、誤差項 $O(s^2)$ もあらわに書いておいた。また、$s = 0$ は無変換に対応するので、$q^k = q^k(0),\ p_k = p_k(0)$ とした。。

(4.65),(4.66) 式を

$$\frac{q^k(s) - q^k(0)}{s} = \frac{\partial G(q^i, p_i, t)}{\partial p_k} + O(s) \tag{4.67}$$

$$\frac{p_k(s) - p_k(0)}{s} = -\frac{\partial G(q^i, p_i, t)}{\partial q^k} + O(s) \tag{4.68}$$

のように変形して $s \to 0$ の極限を取れば、左辺は微分になり、右辺の $O(s) \to 0$ であるから、

正準変換の微分方程式表示

$q^k(s)$, $p_k(s)$ が従う微分方程式

$$\frac{dq^k}{ds} = \frac{\partial G}{\partial p_k} \tag{4.69}$$

$$\frac{dp^k}{ds} = -\frac{\partial G}{\partial q^k} \tag{4.70}$$

が得られる。これを**生成子 G による正準変換の微分方程式表示**と呼ぶ。

この微分方程式[*16]をパラメータ s について積分することによって、有限の正準変換が生成できるので、恒等変換から無限小だけずれた変換**以外**も取り扱うことが可能となる。すなわち、正準変換 (4.66),(4.66) を微分方程式と捉えることによって[*17]、微小ではない、有限のパラメータ s についての正準変換を導入することができるのである。

4.3.2 発展的補足：正準変換の曲線表示

3.3.2 節の発展的補足において、ラグランジュ形式における座標変換をある曲線に沿っての変換とみなして定式化した。それにならって、位相空間上の点 (q^k, p_k) から伸びる、パラメータ s を持つ曲線 $C(s)$ を考え[*18]、その曲線に沿った (Q^k, P_k) までの変換として正準変換を定式化することができる。すなわち、正準変換 (4.65),(4.66) において、$\boldsymbol{A}(s) = (q^k(s), p_k(s)) = (Q^k, P_k)$ として、ベクトル $\boldsymbol{G}$ を

$$\boldsymbol{G} \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G(q^i, p_i, t)}{\partial p_k} \\ \\ -\dfrac{\partial G(q^i, p_i, t)}{\partial q^k} \end{pmatrix} \tag{4.71}$$

で導入すれば、

正準変換の曲線表示

正準変換は、接ベクトル $\boldsymbol{G}$ を持つ曲線 $C(s)$ 上に沿った変換

$$\boldsymbol{A}(s) = \boldsymbol{A}(0) + s\boldsymbol{G} \tag{4.72}$$

と定式化することができる

これを正準変換の曲線表示と呼ぶ[*19]。

[*16]「正準変換の微分方程式表示」という呼び方は、一般的なものではなく、本講義特有の名前である。

[*17]1 変数関数の場合にも、$\dfrac{df}{ds} = g(s)$ なる微分方程式から、$f(s) = f(0) + s\dfrac{df}{ds} = f(0) + sg(s)$ によって、微小量 s だけ進んだ $f(s)$ の値を求めることができたことを思い出そう。

[*18] 例えば空間の等方性と角運動量保存則の例では、回転操作が描く軌跡がこの曲線であり、回転角 θ がパラメータ s に対応する。

[*19]「正準変換の曲線表示」という呼び方も本講義特有の名前である。

4.3.3 正準変換としての時間発展

物理量の**時間発展も正準変換の一種**である。それをみるために、(4.69),(4.70) 式において、$G = H$, $s = t$ としてみると、

$$\frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad \frac{dp^k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^k} \tag{4.73}$$

となるが、これはハミルトン方程式 (4.11),(4.12) そのものである。

また、dt の 1 次まででは、

$$\dot{q}^k = \frac{dq^k}{dt} = \frac{q^k(t+dt) - q^k(t)}{dt}, \qquad \dot{p}_k = \frac{dp_k}{dt} = \frac{p_k(t+dt) - p_k(t)}{dt} \tag{4.74}$$

であるから、これらをハミルトン方程式に代入すると、

$$q^k(t+dt) = q^k(t) + dt\,\frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad p_k(t+dt) = p_k(t) - dt\,\frac{\partial H}{\partial q^k} \tag{4.75}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} s &= dt \\ G &= H \\ Q^k &= q^k(t+dt) = q^k(t+s) \\ P_k &= p_k(t+dt) = p_k(t+s) \end{aligned} \tag{4.76}$$

として正準変換の表式 (4.65),(4.66) と比べれば、**ハミルトン方程式にしたがう時間発展は、時間をパラメータ、ハミルトニアンを生成子とした無限小正準変換であることが分かる**。

正準変換は $q^k(0), p_k(0)$ から伸びる時間軸に沿った方向への変換であり、そのパラメータは時間 t である。ここで、時間発展が無限小であるという制限はない。

余談: ハミルトンヤコビの理論について

正準変換は、位相空間における座標変換といえる。運動する物体とともに動くような座標系では、物体が止まって見えるため、見掛け上時間発展しないのと同様に、正準変換を施すことで、位相空間上の座標値が一定値を保つようにできるはずである。この考えを推し進めたのがハミルトン・ヤコビの理論である*[20]。

4.3.4 正準変換とポアソン括弧

任意の物理量 $F(q^k, p_k, t)$ の正準変換による変化 dF/ds を考えよう。(4.69),(4.70) を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds} &= \frac{\partial F}{\partial q^k}\frac{dq^k}{ds} + \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{dp_k}{ds} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{ds} \\ &= \frac{\partial F}{\partial q^k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q^k} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{ds} \end{aligned} \tag{4.77}$$

となる。ここで、

*[20] 本講義では割愛する。

ポアソン括弧 (Poisson's bracket)

正準変数 (q^k, p_k) に依存する 2 つの関数 A, B に対して、**ポアソン括弧 (Poisson's bracket)** を

$$\{A, B\} \equiv \frac{\partial A}{\partial q^k}\frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k}\frac{\partial B}{\partial q^k} \tag{4.78}$$

で定義する。

このとき、

ポアソン括弧を用いた正準変換の表式

ポアソン括弧を用いると、正準変換 (4.77) は、

$$\frac{dF}{ds} = \{F, G\} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{ds} \tag{4.79}$$

と表すことができる。(現実の系でよくあるように) 物理量が陽に時間に依らない場合には、

$$\frac{dF}{ds} = \{F, G\} \tag{4.80}$$

となる。

4.3.3 節で説明したように、時間発展も正準変換の一種である。すなわち[*21]、

ポアソン括弧を用いた正準変換としての時間発展の表式

正準変換が特に時間発展の場合 ($s = t$, $G = H$)、物理量 F の時間発展は

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{4.81}$$

のようにハミルトニアン H とのポアソン括弧で与えられる。

ポアソン括弧の共変性

ポアソン括弧は (4.77) 式 (および (4.78) 式) で導入された。(4.77) 式の左辺及び右辺第 3 項は正準変数 (p^k, q_k) を含まないので、正準変数のとり方に依らない、すなわち正準変換に対して共変的な量である。したがって、**ポアソン括弧も正準変換に対して共変的**でなければならないことが結論付けられる。

実際、ポアソン括弧が正準変換に対して共変的であること

$$\begin{aligned}\Big\{ A(q^k, p_k),\ B(q^k, p_k), \Big\}_{q,p} &= \Big\{ A(Q^k, P_k),\ B(Q^k, P_k), \Big\}_{Q,P} \\ &\equiv \Big\{ A\big(q^k(Q^i, P_i), p_k(Q^i, P_i) \big),\ B\big(q^k(Q^i, P_i), p_k(Q^i, P_i) \big), \Big\}_{Q,P}\end{aligned} \tag{4.82}$$

を直接計算によっても示すことができる[*22]。

これがポアソン括弧なるものを導入したもう 1 つの理由である。従って、(4.79), (4.81) 式は、正準変換に対して共変的な方程式となっている。

[*21] 4.81 式のように時間発展を記述できることがポアソン括弧なるものを導入した理由の 1 つである。
[*22] 須藤靖「解析力学・量子論」5.5.2 節参照

4.3.5　ハミルトン形式におけるネーターの定理

エネルギー保存則

(4.81) 式より、$F = H$ の場合、$dH/dt = \partial H/\partial t$ であるから、**ハミルトニアンが陽に時間によらなければエネルギーが保存する**ことが直ちに得られる。また、循環座標 q^i が存在すれば、ハミルトン方程式 (4.11),(4.12) より、

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0 \tag{4.83}$$

となり、それに共役な運動量 p_i が保存することもすぐに分かる。

以下の議論では、簡単のために系は時間に陽によらない ($\partial/\partial t = 0$) としよう。

ハミルトン形式における物理系の対称性

ハミルトン形式における対称性と保存則の関係 (ネーターの定理) について調べるために、まず、系に対称性があるということをハミルトニアンを用いて定義しよう。

物理系が対称性を持つということ (I)

ハミルトン形式では、物理系はハミルトニアン H によって記述されるから、**物理系が対称性を持つ**とは、ある**正準変換に対してハミルトニアンが不変**であることである。

(4.65), (4.66) 式に与えたように、正準変換はパラメータ s を用いて記述されるから、**正準変換に対するハミルトニアンの不変性は** $H(s + ds) = H(s)$ **すなわち** $dH/ds = 0$ **と等価である**。ここで $F = H$ として (4.79) 式を用いれば*23、

物理系が対称性を持つということ (II)

物理系が対称性を持つということは、

$$\frac{dH}{ds} = \{H, G\} = 0 \tag{4.84}$$

すなわち、**ハミルトニアン** H **とその変換の生成子** G **とのポアソン括弧が 0 になること**である。

ポアソン括弧は正準変換に対して共変的であるため、どこか 1 つの座標系でポアソン括弧がゼロになれば、正準変換でつながる任意の座標系でゼロになるので、**ハミルトニアン** H **と生成子** G **とのポアソン括弧を適当な座標系で計算すれば系の対称性を調べることができる**、という点で有用なのである。

ハミルトン形式におけるネーターの定理

このとき、(4.81) 式で $F = G$ とおくと、**系が時間に陽によらない場合**、以下の**ハミルトン形式におけるネーターの定理**がいえる。

*23 ポアソン括弧は系の対称性の記述にも使える。

ハミルトン形式におけるネーターの定理

生成子 G による正準変換に対してハミルトニアンが不変である場合:

$$\frac{dH}{ds} = \{H, G\} = -\{G, H\} = 0$$

すなわち、**系に生成子 G による変換について対称性がある場合には**、(4.81) 式で $F = G$ おくと示されるように、**その生成子 G が保存する**。

$$\frac{dG}{dt} = \{G, H\} = 0 \tag{4.85}$$

出席課題 S.4.6*： 1 次元問題を考える。$G(q,p) = p$ すなわち共役運動量は微小並進の生成子となることを示せ。また、物理系に並進対称性があれば、ネーターの定理よりその生成子である共役運動量が保存することを確認せよ。

略解　変換の生成子 $G(q,p) = p$ に対して、(4.65), (4.66) 式より、$q(s) = q + s$, $p(s) = p$。よって変換の生成子 $G(q,p) = p$ (運動量) は 微小並進 s の生成子となる。これより、物理系に並進対称性があるということは、ハミルトニアンと並進の生成子である共役運動量 p とのポアソン括弧が 0 になること ($\{H, G\} = \{H, p\} = 0$) である。このとき、ネーターの定理 (4.85) より $dp/dt = 0$、すなわち共役運動量が保存する。

出席課題 S.4.7*： 地表近傍の、重力以外の相互作用のない粒子の運動は、ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \tag{4.86}$$

で記述される。

1. デカルト座標において循環座標とそれに伴う保存量は何か？
2. ハミルトニアン H が x, y 方向の並進不変性を持つことを示し、ネーターの定理より、運動量 p_x, p_y が保存することを示せ。

略解　1. x, y が循環座標であり、共役運動量である p_x, p_y が保存する。

2. ハミルトニアンは

$$H = \dot{q}^k p_k - L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz \tag{4.87}$$

である。H が x, y 方向の並進不変性を持つこと (系に x, y 方向の並進対称性があること) を言うには、

$$\{H, p_x\} = 0, \quad \{H, p_y\} = 0 \tag{4.88}$$

となることを示せばよい。具体的計算すると、$\{H, p_x\} = 0$, $\{H, p_y\} = 0$ であることが示される。このときネーターの定理 (4.85) より、p_x, p_y が保存することが直ちに示される。

4.4　補足：ルジャンドル変換の幾何学的意味

ラグランジアン L とハミルトニアン H はルジャンドル変換

$$H(q,p) = \dot{q}p - L(q, \dot{q}) \tag{4.89}$$

で関係付けられていた。その (幾何学的) 意味を考えよう。簡単のため、位置を $q = q_0$ に固定して、(4.89) 式の引数から q を取り除いて、1 次元問題として考える。

$$H(p) = \dot{q}p - L(\dot{q}) \tag{4.90}$$

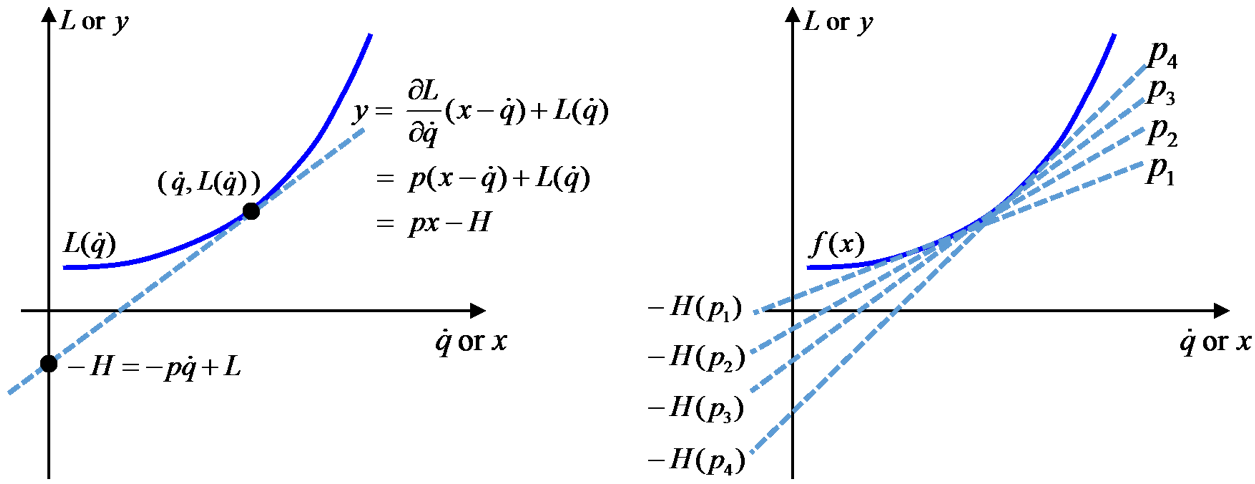

図 4.1　ルジャンドル変換の幾何学的意味

ルジャンドル変換によって $L(\dot{q})$ を $H(p)$ に変換し、この $H(p)$ が $L(\dot{q})$ と全く等価な情報を持つということは、逆に、$p=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ と $H(p)$ から $L(\dot{q})$ を復元できるということにほかならない。そのための条件について考えよう[*24]。

結論からいえば、$L(\dot{q})$ が凹みのない**下に凸な凸関数**であれば[*25]、ルジャンドル変換が可能であり、$H(p)$ は $L(\dot{q})$ と等価な情報を持つ。そのあらましを示したのが図 4.1 である。

まず、$L(\dot{q})$ と $H(p)$ の幾何学的関係を図 4.1 の左図に示す。$(\dot{q}, L)$ 平面では、共役運動量 p は $L(\dot{q})$ の傾きであり、ハミルトニアン $H(p)$ は $L(\dot{q})$ の接線の y 切片にマイナスをつけたものになっている。

$L(\dot{q})$ が下に凸な凸関数であれば $H(p)$ から $L(\dot{q})$ を復元できることは、図 4.1 の右図を見れば直感的に理解できるだろう。すなわち、共役運動量 p すなわち $L(\dot{q})$ の傾きとハミルトニアン $H(p)$ すなわち接線の y 切片を変化させることによって、接線の包絡線としてラグランジアン $L(\dot{q})$ が復元される。

このとき、切片 $H(p)$ が異なるのに同じ傾き p を持つような点が $L(\dot{q})$ に存在すると、そこで情報の縮退が起こるため、$H(p)$ から $L(\dot{q})$ を復元できなくなる。このようなことが起こらないための条件が、$L(\dot{q})$ が下に凸な凸関数であることである[*26]。

4.A　4 章の演習問題

演習問題 4.1: (重要) 位相空間上の軌道

1. 一次元調和振動子において運動量に比例する摩擦力 μp が加わった系を考える。
   (a) 初期に、バネの釣り合いの位置 ($q=0$ とする) で、$p_0=\pm\sqrt{2mE}$ の運動量を与える。摩擦力が

[*24] この節では初等的な議論のみを行う。より厳密な議論については「熱力学の基礎」清水明 (東京大学出版会) の 11 章を参照。

[*25] 多変数の場合の凸関数については「熱力学-現代的な視点から-」田崎晴明 (培風館) の付録 G 参照。より進んだ議論については「熱力学の基礎」清水明 (東京大学出版会) の 11 章を参照。

[*26] 関数が凹みを持つかどうかはどのような引数 (座標系) でその関数を記述するかに依存する。例えば、凹みに沿った座標を取れば、凹みに沿って関数は変化しない。さらに、関数の凹みよりも凹んだ座標系を張れれば、関数はこの座標系のもとでは出っ張っている。演習問題 4.2 において、内部エネルギー $U(S,V)$ からルジャンドル変換によってヘルムホルツ自由エネルギー $F(T,V)$ 等を導出するが、これが可能なのは、内部エネルギーが $U(S,V)$ とあらわしたときに凸関数となるからである。例えば、温度を引数として $U(T,V)$ とすると、これは一般に凸関数ではなくなってしまう。同様に、ヘルムホルツ自由エネルギーが凸関数となるのは、$F(T,V)$ とあらわしたときのみである。「熱力学-現代的な視点から-」田崎晴明 (培風館) の付録 F を参照。

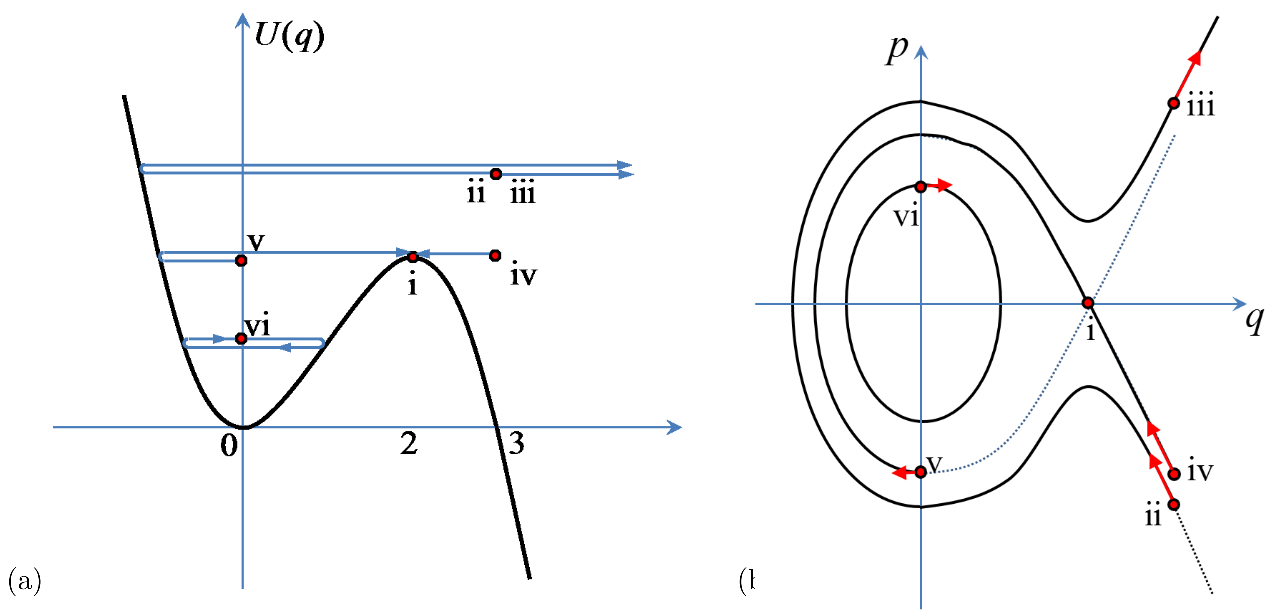

図 4.2　(a) ポテンシャル $U(q)$ における粒子の運動 および (b) 位相空間における粒子の運動の概略図

大きくバネからの力 $m\omega^2 q$ が完全に無視できる場合に、位相空間上の軌道はどうなるか。

(b) バネの釣り合いの位置から q だけ伸ばした状態から手を離す。摩擦力がバネからの力 $m\omega^2 q$ に比べて十分小さいが完全には無視できない場合に、位相空間上の軌道はどうなるか。

2. 質量 $m=1$ の粒子に、位置にのみ依存する力

$$F(q)=\frac{1}{2}(3q^2-6q) \tag{4.91}$$

が加わった系を考える。(ここで、物理量は適当に無次元化されているものとする。)

(a) ポテンシャル $U(q)$ を求めそれを図示せよ。ただしポテンシャルエネルギーの原点を $U(0)=0$ にとる。

(b) 系のエネルギー E を位置 q と粒子の運動量 p を用いてあらわせ。

(c) 次の場合の粒子の運動の概略を、(a) で図示したポテンシャル中、および位相空間上にそれぞれ描き、なぜそのようになるかを簡単に説明せよ。

i. 初期に $q=2$ で静止していた粒子。
ii. 初期に $q=3$ で運動量 $p=-\sqrt{6}$ を持つ粒子。
iii. 初期に $q=3$ で運動量 $p=+\sqrt{6}$ を持つ粒子。
iv. 初期に $q=3$ で運動量 $p=-2$ を持つ粒子。
v. 初期に $q=0$ で運動量 $p=-2$ を持つ粒子。
vi. 初期に $q=0$ で運動量 $p=+\sqrt{2}$ を持つ粒子。

ヒント：

1. 一次元調和振動子において運動量に比例する摩擦力 μp が加わった系.

(a) バネからの力が無視できる場合には、軌道は微分方程式

$$\dot{q}=\frac{p}{m},\qquad \dot{p}=-\mu p \tag{4.92}$$

で与えられる。この微分方程式を与えられた初期条件のもとで解いて、位相空間 (q,p) 上に図示すればよい。

(b) 摩擦力が無視できる場合には楕円軌道を描く。摩擦力が小さいが完全には無視できない場合には、摩擦によりエネルギーを失うので、長軸及び短軸半径が徐々に小さくなる軌道となる。

2. (a), (b) は省略。(c) については図 4.2 参照。説明を各自で加えること。

演習問題 4.2: (重要) 熱力学の関係式とルジャンドル変換

1. 定積熱容量と定圧熱容量の間の関係式を導け。
2. 準静的的微小変化 $d'Q = TdS$, $d'W = PdV$ における熱力学第 1 法則

$$dU = TdS - PdV \tag{4.93}$$

より、内部エネルギーは引数 (S,V) を持つ熱力学量 $U(S,V)$ であるとみなせる。ルジャンドル変換により、別の引数を持つ $H(S,P)$(エンタルピー), $F(T,V)$(ヘルムホルツの自由エネルギー), $G(T,P)$(ギブズの自由エネルギー) とその偏微分を導け。

3. 偏微分の交換可能性を仮定してマクスウェルの関係式

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S &= -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V, \qquad & \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S &= +\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_S &= +\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V, \qquad & \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_S &= -\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \end{aligned} \tag{4.94}$$

を導け。

略解：

1. 定積条件では系は外部に仕事をしない $(d'_V W = 0)$ から、熱力学第 1 法則において

$$d'_V Q = dU + d'_V W = dU \tag{4.95}$$

である[*27]。よって定積熱容量は

$$C_V = \frac{d'_V Q}{dT} = \frac{dU}{dT} \tag{4.96}$$

である。温度と体積の状態量としてあらわした内部エネルギー $U(T,V)$ の全微分

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV \tag{4.97}$$

において、定積条件 $dV = 0$ より、

$$C_V = \frac{d'_V Q}{dT} = \frac{dU}{dT} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \tag{4.98}$$

となる。

次に定圧熱容量について考える。定圧条件では系は外部に $d'_P W = PdV$ の仕事をするので、

$$d'_P Q = dU + PdV \tag{4.99}$$

である。これより定圧熱容量は

$$C_P = \frac{d'_P Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + P\frac{dV}{dT} \tag{4.100}$$

[*27] ここで、一般的に熱収支は状態量ではない (状態変数 V, T 等を決めただけでは一意的に決まらず、過程に依存する) ため全微分 dQ ではなく $d'Q$ とあらわしている。さらに、定積過程であるから $d'_V Q$ と表記した。仕事についても同様。

で与えられる。体積を温度と圧力の状態量 $V = V(T, P)$ と考えると、

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP \tag{4.101}$$

これを (4.97) 式に代入して、定圧過程を考えれば

$$\begin{aligned} dU &= \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right] dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_P dP \\ &\overset{dP=0}{=} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right] dT \end{aligned} \tag{4.102}$$

を得る。以上の結果 (4.100) 式に用いれば、

$$\begin{aligned} C_P &= \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \\ &= C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \end{aligned} \tag{4.103}$$

ちなみに、理想気体の場合にはジュールの法則より

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0 \tag{4.104}$$

また、一般に圧力一定で温度を上げれば体積は増えるので、

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P > 0 \tag{4.105}$$

であるから、

$$C_P > C_V \tag{4.106}$$

である。

2. まず、内部エネルギーについては、(4.93) 式より、偏微分の関係式

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T(S, V), \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -P(S, V) \tag{4.107}$$

が直ちに得られる。ちなみに、(4.93) 式を

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV \tag{4.108}$$

と変形すれば、$S = S(U, V)$ に対して、

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V = \frac{1}{T}, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{P}{T} \tag{4.109}$$

が成り立つ。

エンタルピー： $U(S, V)$ のルジャンドル変換

$$\begin{aligned} & dU = TdS - \big(d(PV) - VdP\big) \\ \Rightarrow \quad & dH = d(U + PV) = TdS + VdP \end{aligned} \tag{4.110}$$

よりエンタルピー (enthalpy)

$$H(S, P) \equiv U + PV \tag{4.111}$$

が構成できる。その偏微分は、

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P = T(S, P), \qquad \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S = V(S, P) \tag{4.112}$$

である。

ヘルムホルツの自由エネルギー： $U(S,V)$ のルジャンドル変換

$$\begin{aligned} dU &= \big(d(TS) - SdT\big) - PdV \\ \Rightarrow \quad dF &= d(U - TS) = -SdT - PdV \end{aligned} \tag{4.113}$$

よりヘルムホルツの自由エネルギー (Helmholtz free energy)

$$F(T,V) \equiv U - TS \tag{4.114}$$

が構成できる。その偏微分は、

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S(T,V), \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -P(T,V) \tag{4.115}$$

である。

ギブズの自由エネルギー： $U(S,V)$ のルジャンドル変換

$$\begin{aligned} dU &= \big(d(TS) - SdT\big) - \big(d(PV) - VdP\big) \\ \Rightarrow \quad dG &= d(U - TS + PV) = -SdT + VdP \end{aligned} \tag{4.116}$$

よりギブズの自由エネルギー (Gibbs free energy)

$$G(T,P) \equiv U - TS + PV \tag{4.117}$$

が構成できる。その偏微分は、

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P = -S(T,P), \qquad \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T = V(T,P) \tag{4.118}$$

である。

3. 偏微分の交換可能性を仮定すれば、$U(S,V)$ に対して

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} = \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} \tag{4.119}$$

であるが、(4.107) 式より、

$$\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial S} = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S \tag{4.120}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S \partial V} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \tag{4.121}$$

であるから、マクスウェル (Maxwell) の関係式

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \tag{4.122}$$

が得られる。

同様に、$H(S,P)$ の偏微分の交換可能性より、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = +\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \tag{4.123}$$

が導かれる。その他のマクスウェルの関係式の導出は各自で行うこと。

演習問題 4.3: 偏微分はむずかしい

内部エネルギー $U = U(S, V)$ の偏微分

$$\left(\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V \right)_T \tag{4.124}$$

を計算したい。次の計算の間違いを指摘して修正せよ。

間違った計算:　(4.107) 式より $\left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V = T$ なので

$$\left(\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V \right)_T = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_T = 0 \tag{4.125}$$

略解：(4.107) 式より T は (S, V) の関数 $T(S, V)$ であるから、$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_S$ という偏微分は自然に定義されているが、$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_T$ を考える際には注意が必要である。

$U(S, V)$ は (S, V) の関数だから、それを S で偏微分したものも (S, V) の関数である。そこで $f(S, V) \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V$ とおくと、計算したいのは、

$$\left(\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V \right)_T = \left(\frac{\partial f}{\partial V} \right)_T \tag{4.126}$$

である。$f = f(S, V)$ の全微分は、

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \right)_V dS + \left(\frac{\partial f}{\partial V} \right)_S dV \tag{4.127}$$

ここで $T = T(S, V)$ から $S = S(T, V)$ と解けたとすると、S の全微分は、

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV \tag{4.128}$$

よって、

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial f}{\partial S} \right)_V \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV \right] + \left(\frac{\partial f}{\partial V} \right)_S dV \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial S} \right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial S} \right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T + \left(\frac{\partial f}{\partial V} \right)_S \right] dV \end{aligned} \tag{4.129}$$

これと $f(S(T, V), V) = f(T, V)$ として f を (T, V) の関数とみなしたときの全微分

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial f}{\partial V} \right)_T dV \tag{4.130}$$

を比べると、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \tag{4.131}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial V} \right)_T = \left(\frac{\partial f}{\partial V} \right)_S + \left(\frac{\partial f}{\partial S} \right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \tag{4.132}$$

を得る[*28]。これより、

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V\right)_T = \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_T &= \left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_S + \left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)_V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V\right)_S + \left(\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V\right)_V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \\
&= \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T
\end{aligned}
\tag{4.133}
$$

とするのが正しい計算である[*29]。

演習問題 4.4: 正準変換の例

1 次元調和振動子のハミルトニアン

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

を考える。以下の母関数の場合の正準変換において、Q, P, H' を求め、変換後のハミルトン方程式を導きハミルトン方程式を解け。

1. 母関数
$$W_1(q, Q) = i\left(\frac{1}{2}Q^2 - qQ\sqrt{2m\omega} + \frac{1}{2}m\omega q^2\right) \tag{4.134}$$
答え： $H' = -i\omega QP$. ハミルトン方程式は $\dot{Q} = -i\omega Q$ となるので、振動解 $Q = Ae^{-i\omega t}$ が直ちに得られる。
2. 母関数 (ポアンカレ変換)
$$W_1(q, Q) = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot Q \tag{4.135}$$
答え： $q = \sqrt{2P/(m\omega)}\sin Q$, $H' = \omega P$. Q が循環座標となるので P が保存する。P が保存するので $H' = \omega P$ よりエネルギーも保存する。ハミルトン方程式は $\dot{Q} = \omega$ となるので、$Q = \omega t + \omega_0$. q の表式に代入すれば $q \propto \sin(\omega t + \omega_0)$ のように振動解が得られる。

演習問題 4.5: 無限小正準変換 (4.58) について

無限小正準変換 (4.58) において、ϵ の 1 次までの範囲では、生成子 G の引数と偏微分の P_i を p_i に変えても、その違いは ϵ の 2 次の効果となることを示せ。(4.61) 式は既知としてよい。

略解： まずはじめに示すべきは、

$$\frac{\partial G(q^i, P_i, t)}{\partial P^k} = \frac{\partial G(q^i, p_i, t)}{\partial p^k} + O(\epsilon) \tag{4.136}$$

[*28] 1 番目の式は単なる偏微分のチェインルールであることに注意。

[*29] ここでは U, S, T の引数を省略した。引数が異なれば数学的に別物の関数であることに注意をはらい、レポートでは引数を回復させて解答すること。

である。この計算では偏微分と G の引数の両方の変化 ($P_i \to p_i$, $P_k \to p_k$) が重要である。微分や引数の添字に注意して計算すれば、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G(q^i, P_i, t)}{\partial P_k} &\overset{(4.61)}{=} \frac{\partial}{\partial P_k} G\left(q^i, p_i - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q^i}, t\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial P_k}\left[G\left(q^i, p_i, t\right) - \epsilon \frac{\partial G}{\partial q^l}\frac{\partial}{\partial p_l} G(q^i, p_i, t) + O(\epsilon^2)\right] \\
&= \frac{\partial p_l}{\partial P_k}\frac{\partial}{\partial p_l}\left[G\left(q^i, p_i, t\right) + O(\epsilon)\right] \\
&\overset{(4.61)}{=} \frac{\partial}{\partial P_k}\left(P_l + \epsilon\frac{\partial G}{\partial q^l}\right)\frac{\partial}{\partial p_l}\left[G\left(q^i, p_i, t\right) + O(\epsilon)\right] \\
&= \left(\delta_l^k + \epsilon\frac{\partial^2 G}{\partial P_k q^l}\right)\frac{\partial}{\partial p_l}\left[G\left(q^i, p_i, t\right) + O(\epsilon)\right] \\
&= \left(\delta_l^k + O(\epsilon)\right)\frac{\partial}{\partial p_l}\left[G\left(q^i, p_i, t\right) + O(\epsilon)\right] \\
&= \frac{\partial G\left(q^i, p_i, t\right)}{\partial p_k} + O(\epsilon) \qquad (4.137)
\end{aligned}
$$

となる。
真面目に計算するとこのようになるが、実際上は、(4.61) 式より

$$
\frac{\partial}{\partial P_k} = \frac{\partial}{\partial p_k} + O(\epsilon), \qquad G(q^i, P_i, t) = G(q^i, p_i, t) + O(\epsilon) \tag{4.138}
$$

であることに注意し、すぐに (4.137) 式の下から 2 番めの等号が成り立つことを見抜いてしまえばよい。(4.136) 式が示されれば、無限小正準変換 (4.58) において、ϵ の 1 次までの範囲では、生成子 G の引数と偏微分の P_i を p_i に変えても、その違いは ϵ の 2 次の効果となることはただちに導かれる。

演習問題 4.6: (重要) 対称性と保存則

1. $G = xp_y - yp_x = \hat{L}_z$ (角運動量の z 成分) が z 軸まわりの微小回転の生成子となることを示せ。

略解：
(4.65),(4.66) 式に G を代入し、x, y に対する結果が z 軸回りの回転となることを示せばよい。$s = \theta$ を微小パラメータとして、(4.65) 式より、$q^1 = x$, $q^2 = y$, $\cdots$ 等として

$$
x = x - \theta y, \qquad y = y + \theta x \tag{4.139}
$$

となるが、3.2.3 節の (3.24) 式のところでも述べたように、これは z 軸まわりの微小回転変換である。したがって、$G = xp_y - yp_x = \hat{L}$ は z 軸まわりの微小回転の生成子となっている。

2. 地表近傍の、重力以外の相互作用のない粒子の運動は、ラグランジアン

$$
L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz \tag{4.140}
$$

で記述される。

(a) ラグランジアンを円筒座標 (ϖ, z, φ) であらわし、循環座標があるかどうか調べ、循環座標が存在する場合には保存量を求めよ。ここで、$\varpi = \sqrt{x^2 + y^2}$, φ は z 軸回りの回転角である。

(b) 4.6.1. の結果を用いて、デカルト座標において、ハミルトニアン H が z 軸まわりの回転対称性を持つことを示し、ネーターの定理より、角運動量 L_z が保存することを示せ。

略解：

(a) 円筒座標とデカルト座標の座標値の関係は、

$$x = \varpi \cos\varphi, \qquad y = \varpi \sin\varphi, \qquad z = z \tag{4.141}$$

である。作図より、

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{e}}_\varpi &= \cos\varphi \hat{\boldsymbol{e}}_x + \sin\varphi \hat{\boldsymbol{e}}_y \\ \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi &= -\sin\varphi \hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\varphi \hat{\boldsymbol{e}}_y \\ \hat{\boldsymbol{e}}_z &= \hat{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned} \tag{4.142}$$

であることも分かる。
円筒座標での位置ベクトルは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= x\hat{\boldsymbol{e}}_x + y\hat{\boldsymbol{e}}_y + z\hat{\boldsymbol{e}}_z \\ &= \varpi\cos\varphi \hat{\boldsymbol{e}}_x + \varpi\sin\varphi \hat{\boldsymbol{e}}_y + z\hat{\boldsymbol{e}}_z \\ &= \varpi\hat{\boldsymbol{e}}_\varpi + z\hat{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned} \tag{4.143}$$

であるから、変位ベクトルは

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{r} &= d(\varpi\hat{\boldsymbol{e}}_\varpi + z\hat{\boldsymbol{e}}_z) = (d\varpi)\hat{\boldsymbol{e}}_\varpi + \varpi(d\hat{\boldsymbol{e}}_\varpi) + (dz)\hat{\boldsymbol{e}}_z + z(d\hat{\boldsymbol{e}}_z) \\ &= d\varpi\hat{\boldsymbol{e}}_\varpi + \varpi d\varphi \hat{\boldsymbol{e}}_\varphi + dz\hat{\boldsymbol{e}}_z\end{aligned} \tag{4.144}$$

よって、円筒座標での速度ベクトルは、

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\varpi}\hat{\boldsymbol{e}}_\varpi + \varpi\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi + \dot{z}\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{4.145}$$

これより、ラグランジアンを円筒座標で表すと

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\varpi}^2 + \varpi^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz \tag{4.146}$$

よって、φ が循環座標である。対応する保存量は、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\varpi^2\dot{\varphi} \tag{4.147}$$

これは角運動量の z 成分 L_z である。実際、(4.143), (4.145) 式より、

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = -m\varpi z\dot{\varphi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_\varpi + m(z\dot{\varpi} - \varpi\dot{z})\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi + m\varpi^2\dot{\varphi}\,\hat{\boldsymbol{e}}_z \tag{4.148}$$

である。

(b) 前問 4.6.1. の結果より、$G = xp_y - yp_x = L_z$ は z 軸回りの微小回転の生成子である。具体的に計算すると $\{H, L_z\} = 0$ であることを示すことができる。よって、ネーターの定理より $G = L_z$ が保存する。

演習問題 4.7: (加点問題) ハミルトン形式におけるネーターの定理の証明

講義ノートを参考に、ハミルトン形式におけるネーターの定理を示せ。ネーターの定理は「系に対称性があれば保存則が存在する」ことを主張するものである。「系に対称性があること」、「その数学的表現」、「結果として保存則が導かれること」の 3 点が論理的・数学的に分かるように示されている必要がある[*30]。

[*30] 結果が列記されているだけでは加点されない。講義ノートに書かれていることを咀嚼して、自分なりの言葉で説明できるようになるための訓練が出題の意図である。

演習問題 4.8: (加点問題) 積分因子の存在と熱力学第 2 法則

演習問題 3.6 では、状態量の独立変数が 2 つの場合について、準静的変化において積分因子が存在して $d'Q = TdS$ となることを示した。一方、独立変数が 3 つ以上の場合にこのことを示すためには熱力学第 2 法則が必要となる。

熱力学第 2 法則の具体的表現はいろいろあるが[*31]、この証明のためには、

ケルビン-プランク (Kelvin-Plank) の原理：

はじめから終わりまで一定の温度にある熱源から正の熱を取り出し、これに相当する仕事を外に向かって行うようなサイクルは存在しない[*32]。

カラテオドリ (Caratheodory) の原理：

与えられた系の任意の状態の任意の近傍に、その状態から断熱過程によっては達することのできない状態が存在する。

のいずれかを採用する。

上述のいずれかのかたちの熱力学第 2 法則を認める場合に、準静的変化において、独立変数が 3 つ以上の場合にも積分因子が存在して $d'Q = TdS$ となることを示せ。

略解： 証明にはかなりの労力を要するが、事実だけでも心に留めておくに値する。原島鮮著,「熱学演習 -熱力学 (基礎物理学選書 18)」, (裳華房) の 3.10, 3.11 節を参照せよ[*33]。

[*31] それらの同値性も証明できる。

[*32] トムソン (Thomson) の原理とも呼ばれる。

[*33] 東邦大学の図書室にもある。最近のゆるめの教科書に慣れた学生にはとっつきにくいかもしれないが、教科書としても、演習書としてもたいへん優れた名著である。また、大森英樹著,「力学的な微分幾何」,(日本評論社) の 5 章には、微分形式によるよりエレガントな証明がある (この本も大変オススメ)。

第 5 章

連続体の運動学：歪みおよび応力テンソル

5.1　おまけ：連続体の概念と流体

大雑把に言えば、流体とは液体と気体を総称して呼ぶものである。固体は変形しようとする作用に対して抵抗するので、弾性体と呼ばれる。これに対して流体は、圧縮にたいしては抵抗するが、変形させようとする作用にたいしては抵抗せず、いくらでも変形してしまう。この性質が流体を特徴づけるものとなっている。

流体とみなせるかどうかは、どんな時間、空間スケールに注目するかに依存する。例えば、地球内部のマントルは、基本的には固体とみなされるべきものであるが、地球内部で長いタイムスケールにわたって起こる大局的運動であるマントル対流を考えるときには、流体とみなすことができる。

物質は微視的に見れば分子、原子、さらにはクォークからなるため、連続的な構造を持たない。しかし、物質を構成する分子数は一般に 10^{23} 個を超えるものであるから、そのような莫大な数の分子や原子の運動を追跡して、物質の巨視的な運動を説明するのは現実的ではない。そこで、流体力学では流体物質を、質量やエネルギー、速度といった巨視的にも定義できる物理量が連続的に分布する**連続体**と呼ばれる仮想的な物体と見なして理論を構築する。

現実の流体が連続体とみなされるための条件について考える。そのためには、**流体素片と呼ばれる、仮想的な流体「粒子」**を考えると都合がよい。粒子といっても電子や原子などの微視的粒子とは異なり、その内部にたくさんの数 N の分子あるいは原子を含むものである。流体素片の大きさのスケールを l とする。流体の密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ は、分子の質量を m とすると、$\rho(\boldsymbol{x},t) \sim Nm/l^3$ で与えられる。ここで l を小さくとりすぎてしまい、流体素片中に数個の粒子しか存在しないような状況になると、流体素片を分子あるいは原子が激しく出入りするようなこととなり、流体の密度 $\rho(\boldsymbol{x},t)$ の時間変化が不連続なものとなってしまう。したがって、l はある程度大きくとる必要がある。

また、現実の流体を連続体とみなすときには、連続体内部の各点での温度という概念が成立している必要がある。そのためには、流体素片内で衝突が十分頻繁に起こっており、流体が局所的に熱平衡になっている必要がある。粒子の衝突は、粒子が他の粒子とぶつかるまでに移動する距離の平均値である**平均自由行程**:λ によって特徴づけられる。流体素片内で十分頻繁に衝突が起こるということは、$l \gg \lambda$ であることが必要である。

しかし、一方で、l を大きくとりすぎて、例えば重力などの外的要因が空間的に変化してしまうようなスケール L になってしまうと、それら外的要因のスケールが効いてきてしまい、「**局所的に定義**される流体素片の密度」という概念自体が不適当なものになってしまう。したがって、$l \ll L$ である必要がある。

流体 (連続体) 近似が成り立つスケール

すなわち、流体を連続体として扱うことができるためには、λ を平均自由行程、L を系の巨視的スケールとして、

$$\lambda \ll l \ll L \tag{5.1}$$

であるような流体素片の大きさ l が存在すればよい。

例えば、0 ° C、1 気圧の空気では $\lambda \sim 6 \times 10^{-6}$ cm である。地形や重力場の変動を $L \sim 100$ cm 程度とすると、空気を流体として扱う場合には、例えば $l \sim 10^{-3}$–10^{-1} cm 程度の流体素片を想定していることになる。

5.2 歪みテンソル：(テンソルへの導入として)

テンソルの導入として歪みテンソルを考える。歪みテンソルは、**固体の変形**を記述するのには便利である。一方、**流体を記述する物理量としては適当ではない**が、テンソルの概念の導入としては適当な題材である。

5.2.1 ヘルムホルツ (Helmholtz) の基本定理

連続体中に微小距離離れた 2 点 $O(0,0,0)$, $P(x,y,z) = P(x^1,x^2,x^3) = P(x^i)$ をとる。連続体の運動に伴って、O は O' に、P は P' に移動したとする (図 5.1 参照)。$O\vec{O}' = \boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{s}(0)$, $P\vec{P}' = \boldsymbol{s}(x^i)$ とする。$\boldsymbol{s}(x^i)$ の各成分 s_j をテイラー (Taylor) 展開して、1 次の微小量まで求めると

$$s_j(x^i) = s_j(0) + \frac{\partial s_j}{\partial x^i} x^i + \cdots = s_{j,0} + \partial_i s_j x^i + \cdots \tag{5.2}$$

となる。ここで偏微分は O 点で評価しており、$s_j(0) = s_{j,0}$ とおいた。

(5.2) 式の右辺第 2 項を形式的に対称部分と反対称部分に分けよう。

$$s_j(x^i) = s_{j,0} + \left[\frac{1}{2}\left(\partial_i s_j + \partial_j s_i\right) x^i\right] + \left[\frac{1}{2}\left(\partial_i s_j - \partial_j s_i\right) x^i\right] + \cdots \tag{5.3}$$

これは、連続体の運動を次の 3 つの要素に分けたことに対応する。

並進運動：(5.3) **式の右辺第** 1 **項**

添字 j を 1 つ持つ右辺第 1 項 $s_{j,0}$ は定ベクトルであり、並進運動を表す。あとで説明するように、ベクトルもテンソルの一種である[*1]。

回転運動：(5.3) **式の右辺第** 3 **項**

右辺第 3 項も添字 j を 1 つ持つのでベクトル的な量である[*2]。これが回転運動を表すことが次のように分かる。$\frac{1}{2}\left(\partial_i s_j - \partial_j s_i\right)$ は添字 i, j について反対称であり、その独立成分の数は 3 である (出席課題 S.5.1 参照)。したがって、レビ・チビタ記号 ϵ_{ijk} と、ベクトル φ^k を用いて、

$$\frac{1}{2}\left(\partial_i s_j - \partial_j s_i\right) = \epsilon_{ijk}\varphi^k \tag{5.4}$$

[*1] いきなりテンソルという言葉が出てきて、なんだか納得できないモヤモヤした印象を受けるかもしれないが、ここではそういうものだと納得して先を読み進めて欲しい。

[*2] 添字 i は和が取られているので、実効的に「生きている」添字は j だけである。

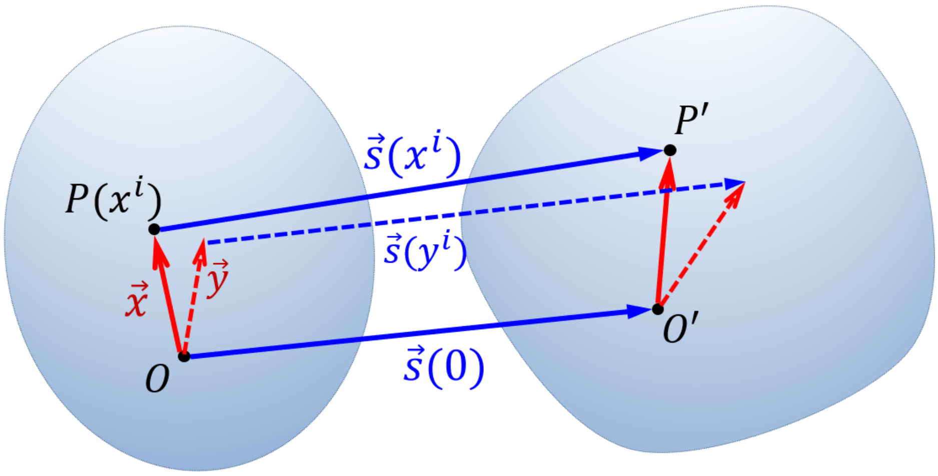

図 5.1　連続体の変形の概要。連続体の変形の記述には、変形の基準となるベクトル $\boldsymbol{x}$ (2 点 O, P) と、その基準ベクトルの運動・変形を記述するベクトル $\boldsymbol{s}(P) = \boldsymbol{s}(x^i)$ の 2 つが必要である。ここで基準点 O が同じでも、基準ベクトルを $\boldsymbol{y}$ に変えれば、この場合の変形ベクトルは一般に違うものになる。

のように表すことができると考えられる。なぜならば、どちらも ij について反対称で、独立成分の数が 3 だからである (出席課題 S.5.2 参照)。

すると、第 3 項は

$$\frac{1}{2}\left(\partial_i s_j - \partial_j s_i\right) x^i = \epsilon_{ijk} x^i \varphi^k = \epsilon_{jki}\varphi^k x^i = [\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{x}]_j \tag{5.5}$$

となる。これは (3.26) 式のところで説明したように、ベクトルの回転を表していることが分かる。

補足事項： 右辺第 3 項を

$$\omega_{ij} x^i \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_i s_j - \partial_j s_i\right) x^i \tag{5.6}$$

と表して ω_{ij} を定義すると、ω_{ij} は添字 2 つを持つ量である。このように、**添字を複数持つ量をテンソル**という[*3]。「添字を複数持つ」の「複数」には 0 や 1 も含めておくことにする。すると、添字を持たないスカラーや添字を 1 つだけ持つベクトルもテンソルの仲間である。

添字の数に応じて、0 階のテンソル、1 階のテンソル、2 階のテンソル、3 階のテンソル・・・という呼び方をする。すなわち、スカラーは 0 階のテンソル、ベクトルは 1 階のテンソルで、回転を表す ω_{ij} は 2 階のテンソルである。

ここで、定義から分かるように $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ である。このように、添字に対して反対称なテンソルを**反対称テンソル**という。すなわち、ω_{ij} は 2 階の反対称テンソルである。

歪み運動：(5.3) 式の右辺第 2 項

次に、右辺第 2 項を

$$\varepsilon_{ij} x^i \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_i s_j + \partial_j s_i\right) x^i \tag{5.7}$$

[*3] 数学的に厳密に言えば、添字を複数持てば直ちにそれがテンソルであるいうわけではなく、座標変換したときにどのように変換しなければならないか、という条件が付けられる。例えば、ベクトルは添字を 1 つ持つものとして表されるが、その成分は座標変換によって特別の仕方で変換する。添字を 1 つ持っていてもベクトルと同じように変換しないものをベクトルと呼ぶわけにはいかない。同様に、テンソルについてもその成分の変換則に条件が付けられている。このあたりの事情は 8 章で解説するが、当面は「添字を複数持つ量がテンソル」と考えておいて問題ない。

と書くことにする。ε_{ij} は添字を 2 つ持つので、2 階のテンソルである・また、定義からわかるように ε_{ij} は添字 i, j について対称 ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) であるので、**対称テンソル**である。

ϵ_{ij} は数学的には対称行列で表現することができる[*4]。対称行列は、固有値問題

$$\varepsilon_{ij} X^j = \varepsilon X_i \tag{5.8}$$

を解くことによって、

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \delta_i^j \varepsilon_j \tag{5.9}$$

のように、固有ベクトル X^i から作れる直交行列を用いて必ず対角形にすることができる。

このとき、固有値 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ は固有ベクトル X_1^j, X_2^j, X_3^j 方向の伸び縮み率を表す。伸び縮みのない場合には、$\varepsilon_i = 1$ である。一般には $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ であるから、立方体は直方体に、球は楕円体へと変形する (歪む)。そこで ε_{ij} を**歪みテンソル**と呼ぶ。

以上をまとめると、

ヘルムホルツ (Helmholz) の基本定理

連続体の運動に伴う変形は、平行移動、回転、歪みをあらわす 3 つのテンソルで表すことができる。これを**ヘルムホルツの基本定理**と呼ぶ。
ここで、**連続体の変形を記述する物理量が 2 つの添字 (足) を持つ量、すなわち 2 階のテンソル**となるのは、変形度の値 (スカラー) を得るためには、

1. 変形を記述するためには微小距離離れた 2 点の運動を追跡する必要があるが、その 2 点を結ぶベクトル (x^i)
2. その 2 点を結ぶベクトルが指定された場合に、さらにその変形方向を決めるベクトル (s_j)

の **2 つの方向 (ベクトル) を指定する必要がある**からである。

歪みテンソルの例が示すように、物理においては、**2 つ以上の方向属性をもつ物理量 (概念)** が登場する[*5]。このような**複数**[*6]**の方向概念を持つ物理量を取り扱うための数学的道具がテンソル**であると理解しておいてよい (象徴的な例として出席課題 S.5.6 参照) [*7]。

5.2.2 歪み速度テンソル

流体の運動を記述するには、歪みテンソルは不適当である。なぜならば、流体は、圧縮にたいしては抵抗するが、変形させせようとする作用にたいしては抵抗せず、際限なく変形してしまうからであり、また、この性質こそ、固体と流体を区別する特徴となっているからである。流体の運動を調べるためには、変形そのものよりも、変形の速度に注目する必要がある。

[*4] 物理的なベクトルが、数を縦や横に並べた縦ベクトルや横ベクトルで表現できるように (ある基底を用いた場合の成分表示)、添字を 2 つ持つテンソルは行列によって表現することができる。すなわち、添字 2 つを持つテンソルをある基底を用いて**成分表示**すると、行列になる。
[*5] ベクトルの方向属性は 1 つだけである。スカラーは方向属性が 0 個である。
[*6] 0(スカラ) ーや 1(ベクトル) も含むことをもう一度注意しておく。
[*7] また、基底を導入することによって幾何学的なベクトルが縦ベクトルで表現できたように、2 階のテンソルは基底を導入することによって行列で表現できる。ただし、3 つ以上の添字を持つより高階のテンソルについては行列で表現することはできない。

これまでに考察した変位ベクトル $\boldsymbol{s}$ のかわりに、$\boldsymbol{s}$ の時間微分 $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{s}}$ を考える。このとき、歪み速度テンソル e_{ij} と回転速度テンソル Ω_{ij} を

$$e_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_i \dot{s}_j + \partial_j \dot{s}_i\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_i v_j + \partial_j v_i\right) \tag{5.10}$$

$$\Omega_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\partial_i v_j - \partial_j v_i\right) \tag{5.11}$$

で定義する。後に見るように、歪み速度テンソルは流体の持つ粘性に関係している。

出席課題 S.5.1： 2 階の 3 次元反対称テンソルの独立な成分の数が 3 であることを示せ。つまり、自由に決められる成分の数が 3 であることを示せ。

略解 3 次元の場合、一般の 2 階のテンソルの独立な成分は $3 \times 3 = 9$ である。2 階の反対称テンソルを成分表示して A_{ij} とあらわす。i, j について反対称であるから、$A_{ji} = -A_{ij}$ である。ここで $i = j$ とすると、$2A_{ii} = 0$。すなわち対角成分は 0 となるので独立成分ではない。よって独立成分の数は 3 つ減る。一方、$i \neq j$ とすると、$A_{ji} = -A_{ij}$ より、残りの 6 つの成分のうち、半分の 3 つは独立ではない (例えば A_{12} を与えると $A_{21} = -A_{12}$ と自動的に決まってしまうので。A_{12} と A_{21} は独立ではない)。よって、2 階の 3 次元反対称テンソルの独立な成分の数は 3 である。

出席課題 S.5.2： 成分計算して (5.4) 式のように表すことができることを示せ。

略解 出席課題 S.5.1 より、$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i s_j - \partial_j s_i)$ の独立成分は、$\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$ の 3 つだけである。このとき、

$$\omega_{12} = \epsilon_{12k}\varphi^k = \epsilon_{123}\varphi^3 = \varphi^3 \tag{5.12}$$

であるから、$\varphi^3 = \omega_{12}$ と選べばよい。また、

$$\omega_{21} = \epsilon_{21k}\varphi^k = \epsilon_{213}\varphi^3 = -\varphi^3 \tag{5.13}$$

である。同様に、$\varphi^2 = -\omega_{13}, \varphi^1 = \omega_{23}$ と選べば、(5.4) 式を成り立たせることができる。

出席課題 S.5.3*： 以下に従い、具体的に φ^k を求めよ。

1. $\epsilon^{lmi}\epsilon_{ijk} = \delta^l_j\delta^m_k - \delta^m_j\delta^l_k$ を用いて、$\epsilon^{lji}\epsilon_{ijk} = -2\delta^l_k$ を示せ。
2. (5.4) 式の両辺に ϵ^{lji} を作用させ、うまく添え字操作することで次の式を示せ。

$$\varphi^l = \frac{1}{2}\epsilon^{lij}\partial_i s_j \tag{5.14}$$

略解 1. $\delta^i_i = 3$ に注意して、

$$\epsilon^{lji}\epsilon_{ijk} = \delta^l_j\delta^j_k - \delta^j_j\delta^l_k = \delta^l_k - 3\delta^l_k = -2\delta^l_k \tag{5.15}$$

2. (5.4) 式の左辺：

$$\frac{1}{2}\epsilon^{lji}\left(\partial_i s_j - \partial_j s_i\right) = \frac{1}{2}\left(-\epsilon^{lij}\partial_i s_j - \epsilon^{lji}\partial_j s_i\right) = -\epsilon^{lij}\partial_i s_j. \tag{5.16}$$

(5.4) 式の右辺：

$$\epsilon^{lji}\epsilon_{ijk}\varphi^k = -2\delta^l_k\varphi^k = -2\varphi^l \tag{5.17}$$

よって

$$\varphi^l = \frac{1}{2}\epsilon^{lij}\partial_i s_j. \tag{5.18}$$

5.3 テンソルの基底とテンソルの操作論的解釈

5.3.1 2 階のテンソルの基底ベクトルによる展開

あるベクトル $\boldsymbol{V}$ を基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ の組で

$$\boldsymbol{V} = V^i\boldsymbol{e}_i = V^1\boldsymbol{e}_1 + V^2\boldsymbol{e}_2 + V^3\boldsymbol{e}_3 \tag{5.19}$$

と表せた (展開できた) ように[*8]、2 階のテンソルは、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \\ &= T^{11}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + T^{12}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + T^{13}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 + T^{21}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 + T^{22}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + T^{23}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 \\ &\quad + T^{31}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 + T^{32}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 + T^{33}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3\end{aligned} \tag{5.20}$$

のように基底テンソル $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ をもちいて表す (展開する) ことができる[*9]。ここで、左辺の $\boldsymbol{T}$ はテンソルそのものであり、右辺の $T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ はテンソル $\boldsymbol{T}$ の基底 $(\boldsymbol{e}_i)$ を用いた表現で、T^{ij} は基底テンソル $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ におけるテンソル $\boldsymbol{T}$ の成分である。

歪みテンソルを基底 $\boldsymbol{e}_i$ を用いて表せば、$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ となるが、このときの ε_{ij} は対角形とは限らない。一方、歪みテンソルの固有ベクトル $\boldsymbol{X}_i$ を用いて $\boldsymbol{\varepsilon}$ を表した $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_X^{ij}\boldsymbol{X}_i\boldsymbol{X}_j$ の成分 ε_X^{ij} は対角形となる[*10]。このように、固体の歪み変形は、歪みテンソルの固有ベクトルを基底にとればその解析が容易になる。

5.3.2　スカラーを返す操作としての 2 階のテンソル

ベクトル $\boldsymbol{V}$ からその成分 (数) を抜き出すためには、基底ベクトルとの内積を取ればよい。例えば、x 成分は

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{e}^x = V^i\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^x = V^i\delta_i^x = V^x \tag{5.22}$$

となる。より一般に、その j 成分は基底ベクトル $\boldsymbol{e}^j$ との内積によって得られる[*11]。

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{e}^j = V^i\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^j = V^i\delta_i^j = V^j \tag{5.24}$$

2 つのベクトル $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ からスカラー (数) を作り出す**内積**操作も同様に、

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{W} = \left(V^i\boldsymbol{e}_i\right)\cdot\left(W^j\boldsymbol{e}_j\right) = V^iW^j\,\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = V^iW^j\delta_{ij} = V^iW_i \tag{5.25}$$

と表される。

ここで、これらを次のように「テンソル的」に見ることにする。すなわち、成分計算では、方向を指定したためにその方向のベクトル成分が得られたとする：

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{e}^j) = V^j \tag{5.26}$$

つまり、**ベクトルは 1 つの方向属性を持つから、その方向を指定するべく、基底ベクトルを「作用させ」たら (食べさせたら)、その成分が得られたと考える**のである。内積計算も同様に、ベクトル $\boldsymbol{W}$ を作用させたら、スカラー (数、内積) を返す**操作**であるとみなす。

[*8] ここで左辺の $\boldsymbol{V}$ はベクトルそのもの。右辺の $V^i\boldsymbol{e}_i$ はベクトル $\boldsymbol{V}$ の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を用いた表現で、V^i は基底 $\boldsymbol{e}_i$ におけるベクトル $\boldsymbol{V}$ の成分である。

[*9] 数学の教科書などでは、**テンソル積**という言葉が出てきて、2 階のテンソルの基底 (テンソル) が $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ ではなく

$$\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j \tag{5.21}$$

のようにあらわされている場合が多いが、実際上は (順序にさえ気をつければ)、基底が 2 つ並んだものであると理解しておいて問題ない。

[*10] これが対角化の操作の幾何学的 (テンソル的) 意味である。

[*11] 添字の上下は今のところ寄にしていないので、

$$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{e}_j = V^i\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = V^i\delta_{ij} \overset{(1.80)}{=} V_j \tag{5.23}$$

としてもよい。

この考え方を拡張すると、2 階のテンソルは、**ベクトルを 2 つ作用させるとスカラーを返す操作**であると考えることができる。すなわち、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}^k, \boldsymbol{e}^l) &= T^{ij}(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^k)(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}^l) = T^{ij}\delta_i^k \delta_j^l = T^{kl} \qquad (5.27) \\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}) &= \boldsymbol{T}(V^k \boldsymbol{e}_k, W^l \boldsymbol{e}_l) = T^{ij}\big(\boldsymbol{e}_i \cdot (V^k \boldsymbol{e}_k)\big)\big(\boldsymbol{e}_j \cdot (W^l \boldsymbol{e}_l)\big) \\ &= T^{ij} V^k W^l \delta_{ik}\delta_{jl} = T^{ij} V_i W_j \qquad (5.28) \end{aligned}$$

ここで、テンソル

$$\boldsymbol{T}(\ \ ,\ \ ) = T^{ij}\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j \qquad (5.29)$$

の 2 つの空きスロットの内、左側にベクトルが作用した場合には左側の基底 $\boldsymbol{e}_i$ との内積操作が取られ、右側にベクトルが作用した場合には右側の基底 $\boldsymbol{e}_j$ との内積操作がなされるものと約束する。

5.4 応力テンソル

5.4.1 流体力学に向けた導入：体積力と面積力

流体には一般に 2 種類の力が働く。1 つは重力や電磁気力、慣性力のように、主に外部要因から受ける、流体素片の体積に比例する**体積力**である。例えば、密度 ρ, 体積 ΔV の流体素片の受ける重力は $g\rho\Delta V$ である。より一般に、体積力は、単位質量あたりの力を $\boldsymbol{K}$ として、

$$\boldsymbol{K}\rho\Delta V \qquad (5.30)$$

で与えられる。

もう 1 つの力は、流体素片どうしが互いに接触することによって直接伝わる力である。この力は例えば圧力による力のように、接触面積に比例するので、**面積力**と呼ばれる。そして、その単位面積あたりの力を**応力**と呼ぶ。応力はある面要素 $\Delta\boldsymbol{S}$ に働く単位面積あたりの面積力である。ここで面要素ベクトル $\Delta\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\Delta S$ は、面要素の外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と、その面積の大きさ ΔS によって表される。応力を $\boldsymbol{F}$ とすると、境界面の微小面積 ΔS にはたらく面積力は

$$\boldsymbol{F}\Delta S \qquad (5.31)$$

で与えられる。

5.4.2 応力ベクトルと応力テンソル: ベクトルを返す操作としての 2 階のテンソル

力としての応力はベクトルであるが、**応力を考える場合には、それが作用する面、すなわち面要素ベクトルを必ず指定**しなければならない。したがって、

> 応力テンソルの導入
>
> 応力の記述には、応力が働く面を決める法線ベクトルと、その面に働く応力の方向の 2 つのベクトルが必要である。したがって、応力の数学的な記述は 2 階のテンソルにならざるを得ない。

そこで、**応力テンソルを τ_{ij} のように導入し**[*12]、**それに対して法線ベクトル n^j が与えられたとき、**$F_i = \tau_{ij}n^j$ **によって応力ベクトル (の成分) が得られる**、と考えることにしよう。

[*12] τ_{ij} は正確には応力テンソルの成分。

基底も含めて考えると、応力テンソルと応力ベクトルは

$$\boldsymbol{\tau}(\ ,\ ) = \tau_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j \tag{5.32}$$
$$\boldsymbol{F}(\ ) = F_i\boldsymbol{e}^i \tag{5.33}$$

である。一方、応力テンソルに法線ベクトルを作用させたもの (食べさせたもの) が応力ベクトルになるとすると、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\ ) = \boldsymbol{\tau}(\ ,\boldsymbol{n}) &= \tau_{ij}\boldsymbol{e}^i\big(\boldsymbol{e}^j\cdot(n^k\boldsymbol{e}_k)\big) = \tau_{ij}n^k\boldsymbol{e}^i(\boldsymbol{e}^j\cdot\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{e}^i\tau_{ij}n^k\delta^j_k \\ &= \tau_{ij}n^j\boldsymbol{e}^i\end{aligned} \tag{5.34}$$

となるので、確かに $F_i = \tau_{ij}n^j$ となっている[*13]。

応力テンソル τ_{ij} を用いると、単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n}$ である面要素 $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$ に働く面積力は、

$$(\boldsymbol{F}\Delta S)_i = F_i\Delta S = \tau_{ij}n^j\Delta S \tag{5.37}$$

となる。

(5.34) 式をもう一度見てみよう。連続体の変形を記述する歪みテンソルの例では、歪みテンソルが 2 階のテンソル (添字が 2 つ) となった理由は、(変形度という) スカラーを得るためには、変形の基準となる 2 点間のベクトルと、それが変形する方向の 2 つのベクトルを指定しなければならないからであった。一方、応力テンソルが 2 階のテンソルとなるのは、面要素 (の方向) を一つ定めた場合に、応力ベクトルが決定されるものだからである。

つまり、方向を決めて 1 つ添字をつぶしたときに、1 つだけ添え字が残っていなければならないから[*14]である。この意味で、2 階のテンソルである応力テンソルは次のようにみなすことができる。

応力ベクトルを返す操作としての応力テンソルの解釈

応力テンソル $\boldsymbol{\tau} = \tau_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$ (2 階のテンソル) は、面要素の方向すなわち法線ベクトル $\boldsymbol{n} = n^k\boldsymbol{e}_k$ (1 階のテンソル) が与えられたときに、その面にはたらく応力ベクトル $\boldsymbol{F} = \tau_{ij}n^j\boldsymbol{e}^i$ (1 階のテンソル) を返す操作である。

5.4.3　ベクトルやテンソルを返す操作としてのテンソル

この考え方を更に拡張しよう。歪みテンソルや応力テンソルに限らず、より一般に、

[*13] 5.5.1 節で示すように、応力テンソルは対称テンソルであるから、法線ベクトルを左右のどちらのスロットに作用させてもよい。実際、左のスロットに法線ベクトルを作用させると、

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n},\ ) = \tau_{ij}\big(\boldsymbol{e}^i\cdot(n^k\boldsymbol{e}_k)\big)\boldsymbol{e}^j = \tau_{ij}n^k\delta^i_k\boldsymbol{e}^j = \tau_{ij}n^i\boldsymbol{e}^j \tag{5.35}$$

となるが、応力テンソルが対称テンソルであれば、

$$\boldsymbol{F} = \tau_{ij}n^i\boldsymbol{e}^j = \tau_{ji}n^i\boldsymbol{e}^j = \tau_{kl}n^l\boldsymbol{e}^k = \tau_{ij}n^j\boldsymbol{e}^i \tag{5.36}$$

となるので、(5.34) 式と同じ結果が得られる。

[*14] 1 階のテンソルすなわちベクトルでなければならないから。

2 階のテンソルの 2 通りの解釈

2 階のテンソル $\boldsymbol{T} = T_{ij}\boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j$ は、

1. 任意のベクトル $\boldsymbol{V} = V^k\boldsymbol{e}_k$ から、別のベクトル $T_{ij}V^j\boldsymbol{e}^i$ を返す操作
2. 2 つのベクトル $\boldsymbol{V} = V^i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{W} = W^j\boldsymbol{e}_j$ が与えられたときにスカラー $T_{ij}V^iW^j$ を返す操作

のいずれの操作ともみなすことが可能である。

さらに、3 階のテンソル T_{ijk} は*15、

1. 任意のベクトル W^k に対して、2 階のテンソル $T_{ijk}W^k$ を与える操作
2. 2 つのベクトル V^j, W^k から、ベクトル $T_{ijk}V^jW^k$ を作り出す操作
3. 3 つのベクトル U^i, V^j, W^k から、スカラー $T_{ijk}V^jW^k$ を返す操作

のいずれの操作とも考えることができる。より高階のテンソルへの拡張は自明であろう (象徴的な例として出席課題 S.5.6 参照)。

(補足事項)： ここで重要となるのは、操作の線形性である。すなわち、例えば、2 階のテンソルであれば

$$T_{ij}(aV^i + bW^i)(cX^j + dY^j) = \\ ac\,T_{ij}V^iX^j + ad\,T_{ij}V^iY^j + bc\,T_{ij}W^iX^j + bd\,T_{ij}W^iY^j \tag{5.38}$$

が成り立つことである。

出席課題 S.5.4： 歪みテンソルを 2 階のテンソルの解釈 1., 2. に基づいてそれぞれ説明せよ。

略解 歪みテンソル $\boldsymbol{\varepsilon}$ を基底 $\boldsymbol{e}_i$ を用いて表せば $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ となる。

2 階のテンソルの解釈 1. に沿って、変形の基準となる微小ベクトル $\boldsymbol{x} = x^k\boldsymbol{e}_k$ を与えれば、変形ベクトル

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\varepsilon}(\quad, \boldsymbol{x}) = \varepsilon^{ij}\boldsymbol{e}_i\big(\boldsymbol{e}_j \cdot (x^k\boldsymbol{e}_k)\big) = \varepsilon^{ij}x^k\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_k) = \varepsilon^{ij}x^k\boldsymbol{e}_i\delta_{jk} = \varepsilon^{ij}x_j\boldsymbol{e}_i \tag{5.39}$$

が得られる*16。$\boldsymbol{s} = s^i\boldsymbol{e}_i$ と展開すれば、$s^i = \varepsilon^{ij}x_j$ であり、5.2.1 節の結果を再現する。

一方、2 階のテンソルの解釈 2. に沿って、基準ベクトル $\boldsymbol{e}_k$ の $\boldsymbol{e}_l$ 方向の変形度を考えれば、変形度

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) = \varepsilon^{ij}\big(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k\big)\big(\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_l\big) = \varepsilon^{ij}\delta_{ik}\delta_{jl} = \varepsilon_{kl} \tag{5.40}$$

が得られる。より一般に、基準ベクトル $\boldsymbol{a} = a^k\boldsymbol{e}_k$ の $\boldsymbol{b} = b^l\boldsymbol{e}_l$ に関する変形度は、

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \varepsilon^{ij}\big(\boldsymbol{e}_i \cdot a^k\boldsymbol{e}_k\big)\big(\boldsymbol{e}_j \cdot b^l\boldsymbol{e}_l\big) = \varepsilon^{ij}\,a^k\delta_{ik}\,b^l\delta_{jl} = \varepsilon^{ij}a_ib_j \tag{5.41}$$

で与えられる。

出席課題 S.5.5： 応力テンソルを「2 階のテンソルの解釈 1.」に基づいて説明せよ。また (5.34) 式を示し、応力テンソルを「2 階のテンソルの解釈 2.」に基づいて説明せよ。

出席課題 S.5.6： 一般相対性理論では曲がった時空を取り扱う。時空が曲がっているかどうかの指標としてリーマンの曲率テンソルがある。リーマンの曲率テンソルとは、任意のベクトルを、任意の平行四辺形に沿って平行移動させて元の位置に戻したとき、元のベクトルとのズレを与える

*15 以下、混乱の恐れのない限り、**基底ベクトルを省略して成分のみでテンソルを記述する。**

*16 歪みテンソルは対称テンソルなので、どちらのスロットに基準ベクトルを作用させても結果は変わらないことに注意。

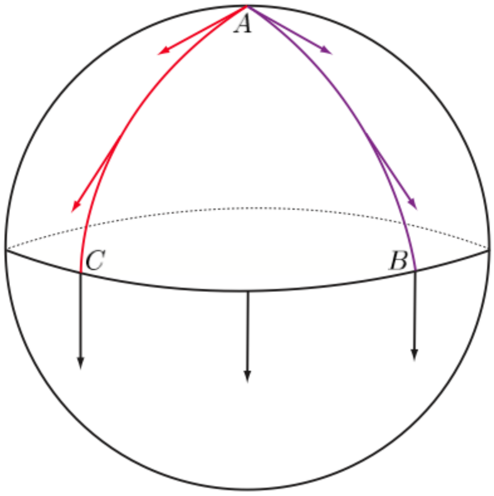

図 5.2　球面上の閉曲線に沿っての平行移動の結果（ここでは平行四辺形ではなく「三角形」に沿って平行移動しているが、議論の本質には影響しない）：点 A におけるベクトル (紫) を $A \to B \to C \to A$ と閉曲線 ABC に沿って平行移動させると、戻ってきた点 A においてベクトル (赤) となる。これは元のベクトル (紫) とは一致しない。

ものである。平面では、任意の平行移動でベクトルは元のベクトルに戻るので、リーマンの曲率テンソルはゼロであるが、球面ではそうではない (図 5.2 参照)。このリーマンの曲率テンソルが

$$R_{abcd} \tag{5.42}$$

のように 4 つの添字を持つことを示せ。

略解　題意より、リーマンの曲率テンソルとは、ベクトル 1 つと平行四辺形 1 つを与えると、(ずれ) ベクトル 1 つを返すものである。平行四辺形の記述にはベクトル 2 つが必要である。すなわち、リーマンの曲率テンソルとは、ベクトル 3 つ (平行移動させるベクトル 1 つ, 平行四辺形を作るベクトル 2 つ) を与えると、(ずれ) ベクトル 1 つを返すものである。このような物理量は、4 つの添字を持つテンソルでなければならない。例えば、平行移動させるベクトルを $\boldsymbol{v}$, 平行四辺形を作るベクトルを $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ として、4 つの添字を持つリーマンの曲率テンソルを R_{abcd} とあわすと、(ずれ) ベクトル $\Delta \boldsymbol{v}$ は

$$(\Delta v)_a = R_{abcd}\,(\quad, v^b, X^c, Y^d) \tag{5.43}$$

のように与えられる[*17]。

5.5　つり合いの方程式

ここでは、連続体の素片 (要素) に働く**力およびモーメントの釣り合い**を考える。連続体に対する力の釣り合いを一般的に議論するためには、(性質の異なる) 体積力と面積力を比べなければならない。面積分を体積分に変えるような場合には、いわゆる積分定理が必要になるが、これについては 5.7 節にまとめてある。力のつり合い方程式は、ダランベールの原理を用いて運動方程式を導く際に用いられる。

[*17] $R_{abcd}\,(\quad, v^b, X^c, Y^d)$ と表すか、$R_{abcd}\,(X^b, Y^c, \quad, v^d)$ と表すかなどの自由度はあるが、ここでは気にしない。

5.5.1 力のつり合い

連続体の内部に任意の閉曲面 S で囲まれた微小領域 V をとり、この領域について力のつり合い条件を考える。単位体積当たりにはたらく体積力は $\rho\boldsymbol{K}$ であるから、V にはたらく体積力の和は、

$$\int_V \rho K_i dV \tag{5.44}$$

で与えられる。

一方、面要素 dS の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすると、S にはたらく面積力の和は、応力ベクトルが $T_i = \tau_{ij}n^j$ となることから、

$$\int_S \tau_{ij}n^j dS = \int_V \partial_j \tau_{ij} dV \tag{5.45}$$

となる。ここでガウスの定理を用いた。

体積力と面積力の合計がつり合っているとすると、

$$\int_V \left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x^j} + \rho K_i \right) dV = 0 \tag{5.46}$$

である。いま、連続体内部にとった V は自由に選ぶことができるから、任意の V でこれが成立するためには、

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x^j} + \rho K_i = 0 \tag{5.47}$$

でなければならない。これが**力のつり合い条件を表す方程式**である。

出席課題 S.5.7： 力の釣り合い条件 (5.47) を導出せよ。

5.5.2 モーメントのつり合い

V 内部の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とすると、体積力によるモーメントの合計は、

$$\int_V [\boldsymbol{x} \times (\rho\boldsymbol{K})]_i dV = \int_V \rho\epsilon_{ijk}x^j K^k dV = \epsilon_{ijk}\int_V \rho x^j K^k dV \tag{5.48}$$

である。面積力 (応力) によるモーメントの合計は、

$$\begin{aligned}
\int_S [\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{T}]_i dS &= \int_S \epsilon_{ijk}x^j T^k dS = \int_S \epsilon_{ijk}x^j(\tau^{kl}n_l)dS = \epsilon_{ijk}\int_S n_l(x^j\tau^{kl})dS = \epsilon_{ijk}\int_V \partial_l(x^j\tau^{kl})dV \\
&= \epsilon_{ijk}\int_V \left(\tau^{kl}\frac{\partial x^j}{\partial x^l} + x^j\frac{\partial \tau^{kl}}{\partial x^l} \right) dV = \epsilon_{ijk}\int_V \left(\tau^{kl}\delta^j_l + x^j\frac{\partial \tau^{kl}}{\partial x^l} \right) dV \\
&= \epsilon_{ijk}\int_V \left(\tau^{kj} + x^j\frac{\partial \tau^{kl}}{\partial x^l} \right) dV = \epsilon_{ijk}\int_V \left(\tau^{kj} - \rho x^j K^k \right) dV
\end{aligned} \tag{5.49}$$

である。ここで力のつり合い (5.47) 式より、$\partial\tau^{kl}/\partial x^l = -\rho K^k$ であることを最後の等号を導く際に用いた。

これらより、体積力と面積力によるモーメントのつり合い方程式は、

$$\int_V [\boldsymbol{x} \times (\rho\boldsymbol{K})]_i dV + \int_S [\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{T}]_i dS = \epsilon_{ijk}\int_V \tau^{kj} dV = 0 \tag{5.50}$$

となる。これは、応力テンソルが対称テンソル

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \tag{5.51}$$

であれば自動的に満たされる (2.3.1 節の (2.54) 式参照)。

このモーメントのつり合い式からは体積力が消えているので、**応力テンソルの対称性は、流体素片が運動しており、体積力が慣性力を含むような場合にも一般的に成り立つ**。すなわち、**応力テンソルは対称テンソル**である。

5.5.3 静止流体

応力状態のもっとも簡単な例として、応力テンソルが

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} \tag{5.52}$$

で表される場合について考えよう。このとき、流体の面要素 dS に作用する応力ベクトルは

$$T_i = \tau_{ij}n^j = -P\delta_{ij}n^j = -Pn_i \tag{5.53}$$

となる。すなわち、応力は面要素の方向、すなわち流体中に選んだ領域の形には依存せず、その大きさが P, その方向が面要素に垂直に内側に向いている。これは (周囲の流体から圧力を受けている) 流体中の流体素片にはたらく応力の正しい記述になっている。**このような応力状態は静止流体中**[*18]**で実現**される。(5.52) 式の P を圧力とよぶ。

この場合のつり合いの方程式は、

$$-\frac{\partial P}{\partial x^i} + \rho K^i = 0 \tag{5.54}$$

となる。特に、外力がポテンシャル力 $\boldsymbol{K} = -\nabla U$ で、圧力が密度だけの関数、あるいは密度が圧力だけの関数

$$P = P(\rho), \qquad \rho = \rho(P) \tag{5.55}$$

の場合には、つり合いの方程式を積分すると、

$$\int \frac{dP}{\rho} + U = C = \text{一定} \tag{5.56}$$

となる (演習問題)。

圧縮性が無視できる場合

気体は容易に圧縮を受けるためその密度を一定と考えることはできないが、地表近くの大気圧下を考える限りにおいて、液体、例えば水の密度は近似的に一定であるとみなすことができる。このように流体の圧縮性を無視できる場合には、$\rho = \text{一定}$ より $\rho C = \text{一定}$ だから、(5.56) 式は

$$P + \rho U = \rho C = \text{一定} \tag{5.57}$$

となる。

さらに、外力として重力のみを考え、地表近くで一様重力場とみなすことが出来る場合には、(5.57) 式は、

$$P = C - \rho U = P_0 - \rho g z \tag{5.58}$$

[*18] あるいは**完全流体**中。

となる。ここで P_0 は $z=0$ における圧力の値である。この圧力の関係式を用いると、「水中の物体には、その物体がおしのけた水の重さに等しい浮力がはたらく」という有名な**アルキメデスの原理**を証明することができる (演習問題)。

出席課題 S.5.8： 静止流体中の応力テンソル (5.52) で負符号がつく理由について説明せよ。

5.6　流体の記述：ラグランジュ的記述とオイラー的記述

流体の運動の記述の仕方には、**ラグランジュ的記述**と**オイラー的記述**の 2 種類がある。

ラグランジュ的記述とオイラー的記述

ラグランジュ的記述では、流体素片 (流体粒子) の運動を追跡しながらその変化を記述する (粒子的概念による描像)。一方、オイラー的記述法では、空間に固定した場所で、流体の物理量の変化を時間ごとに記述する (場の概念による描像)。

例えて言えば、高速道路を走る自動車の速度について、ラグランジュ的記述は自動車を 1 台ごとに追跡して調べる方法に対応しており、オイラー的記述は、高速道路の各地点に速度測定装置を配置して速度を調べる方法に対応している。

ラグランジュ的記述における物理量 $F(x^k,t)$ の追跡方法を、オイラー的記述で表すことを考える。時刻 t に位置 $\boldsymbol{x}$ にあり、速度 $\boldsymbol{v}$ で運動していた流体素片は、微小時刻 Δt 後には、$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}\Delta t$ に到達しているはずである。したがって、流体素片を追跡するラグランジュ的記述での物理量 F の変化は、

$$\Delta_L F \equiv F(x^k+v^k\Delta t, t+\Delta t) - F(x^k,t) = \frac{\partial F}{\partial x^k}v^k\Delta t + \frac{\partial F}{\partial t}\Delta t + O(\Delta t^2) \tag{5.59}$$

となる。ここで中辺の第 1 項をテイラー展開した。両辺 Δt で割って $\Delta t\to 0$ の極限を取ると、$O(\Delta t^2)$ の寄与は消えて、

$$\frac{DF}{Dt} \equiv \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta_L F}{\Delta t} = \frac{\partial F}{\partial t} + v^k\partial_k F = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\right)F \tag{5.60}$$

となる。

ラグランジュ微分

ここで、

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla \tag{5.61}$$

は、ラグランジュ的記述における時間発展 (微分) の演算子であり、**ラグランジュ微分** (あるいは物質微分) という。

F として位置座標 x^i をとると、

$$\frac{Dx^i}{Dt} = \frac{\partial x^i}{\partial t} + v^k\partial_k x^i = 0 + v^k\delta^i_k = v^i \tag{5.62}$$

であり、速度 $v^i(x^k,t)$ をとると、

$$\frac{Dv^i}{Dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k\partial_k v^i \tag{5.63}$$

である。

ただし、$v^k\partial_k v^i = [(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}]_i$ となるのはデカルト座標系においてのみであるため、極座標のような直交曲線座標でも使えるようにするためには、ベクトルの公式

$$\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{A} \tag{5.64}$$

をもちいて、

$$\frac{Dv^i}{Dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla_i(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) - [\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})]_i \tag{5.65}$$

とする必要がある[*19]。

出席課題 S.5.9：　(5.62) 式の変形を説明せよ。なぜ $\partial x^i/\partial t = 0$ なのか？

略解　オイラー的記述による流体場の考え方では x^i と t が独立変数であるからである。つまり、2 変数関数 $f(x,y)$ の偏微分を考えるときに $\partial y/\partial x = 0$ とするのと同じ理由で $\partial x^i/\partial t = 0$ である。

5.7　数学的補足：積分定理

5.7.1　ガウスの定理

閉曲面 S で囲まれた領域 V を連続体の内部にとり、S の面要素 dS の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする (図 5.3 参照)。任意の関数 f について、体積分

$$I = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial x^3}dx^1dx^2dx^3 \tag{5.66}$$

を考える。x^3 についての積分を実行すると、

$$I = \iint_S [f_+ - f_-]dx^1dx^2 = \iint_{S_+} f_+n^3_+dS_+ + \iint_{S_-} f_-n^3_-dS_- = \iint_S fn^3dS \tag{5.67}$$

となる。ここで、f_+, f_- はそれぞれ S の上側と下側での値である。

上式が成り立つことは以下のようにして分かる。$dS_3 = dx_1dx_2$ とおく。ここで、$\boldsymbol{n}_+ = n^i_+\boldsymbol{e}_i$ と展開すると、$d\boldsymbol{S}_+$ の $\boldsymbol{e}_3$ 方向成分が dS_3 であるから、$dx^1dx^2 = \boldsymbol{e}_3\cdot d\boldsymbol{S}_+ = n^3_+dS_+$ となる。同様に、面要素から外向きに法線方向をとっていることに注意すると、$dx^1dx^2 = -n^3_-dS_-$ を得る。両方をまとめれば最後の表式が得られる。

$\partial/\partial x^i$, n^i, $(i=1,2)$ の場合も同様なので、

ガウスの定理 (Gauss' law)

一般に

$$\iiint_V \nabla f\,dV = \iint_S f\boldsymbol{n}\,dS = \iint_S f\,d\boldsymbol{S} \tag{5.68}$$

が成立する。これを**ガウスの定理** (Gauss's law) という。

以下、特に混乱の恐れのない場合には、積分記号を簡略化して、$\iiint_V \to \int_V$, $\iint_S \to \int_S$ と表すことにする。ここで、f は関数であるとしてきたが、f がベクトルやテンソルの成分であってもガウスの定理は成り

[*19] 特に断りのない限り、ベクトルの公式はデカルト座標だけで成り立つものと考えておくのが安全である。一般の座標系への拡張は、ベクトル解析ではなく 8 章でその初歩を学ぶテンソル解析に基づいて考えるのが最も効率的であると思う。

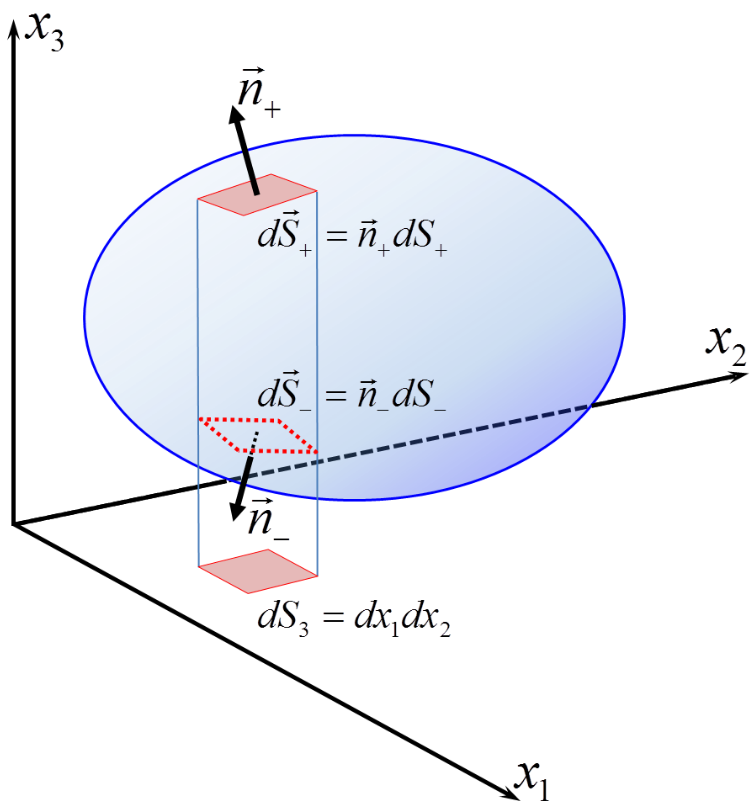

図 5.3　ガウスの定理の証明

立つ。例えば 2 階のテンソル T_{jk} の場合には

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x^i} T_{jk} dV = \int_S T_{jk} n_i dS \tag{5.69}$$

である。

　また、ベクトルの成分 W^i に対して、

$$\int_V \frac{\partial W^1}{\partial x^1} dV = \int_S n_1 W^1 dS,$$
$$\int_V \frac{\partial W^2}{\partial x^2} dV = \int_S n_2 W^2 dS,$$
$$\int_V \frac{\partial W^3}{\partial x^3} dV = \int_S n_3 W^3 dS$$

を辺々足し合わせると、

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{W} dV = \int_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{W} dS \tag{5.70}$$

が得られる。ガウスの定理として最も多く利用されるのはこの形であろう。

　ガウスの定理の証明からも推察されるように、閉曲線 C で囲まれた (2 次元) 領域 S を連続体の内部にとり、C の線要素 dS の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とすれば、2 次元の場合のガウスの定理

$$\int_S \nabla f \, dS = \oint_C f \boldsymbol{n} \cdot d\boldsymbol{s} \tag{5.71}$$

が成り立つ。さらに、3 次元以上の高次元の場合にもガウスの定理が成り立つことが示される。

5.7.2 グリーンの定理

ガウスの定理 (5.70) で

$$\boldsymbol{W} = f\nabla g - g\nabla f \tag{5.72}$$

とおくと、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{W} = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f \tag{5.73}$$

であり、また、法線ベクトル方向の微分 $\boldsymbol{n}\cdot\nabla f$ を $\partial f/\partial n$ と書くことにすると、

グリーンの第 1 積分公式 (Green's 1st intgral)

$$\int_V \left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right) dV = \int_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dS \tag{5.74}$$

が得られる。この積分公式をグリーンの定理またはグリーンの第 1 積分公式と呼ぶ。

グリーンの第 2 積分公式は、ガウスの定理 (5.70) で

$$\boldsymbol{W} = g\nabla f \tag{5.75}$$

とおくことで、

グリーンの第 2 積分公式 (Green's 2nd intgral)

$$\int_V (\nabla f)\cdot(\nabla g)dV + \int_V g\nabla^2 f dV = \int_S g\frac{\partial f}{\partial n}dS \tag{5.76}$$

のように与えられる。グリーンの第 2 積分公式を用いると、与えられた境界条件にたいして、ラプラス方程式の解が一意的に定まることを証明することができる (演習問題)。

グリーンの定理を示す際にガウスの定理を用いたことからも分かるとおり、空間 2 次元の場合のストークスの定理は、

$$\int_S \left(f\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right) dS = \oint_C \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) ds \tag{5.77}$$

$$\int_S (\nabla f)\cdot(\nabla g)dS + \int_V g\nabla^2 f dS = \oint_C g\frac{\partial f}{\partial n}ds \tag{5.78}$$

で与えられる。

5.7.3 ストークスの定理

面積分と線積分を関係づけるストークスの定理を導こう。この定理は流体力学における流体素片の局所的な角運動量の保存則に相当する、ケルビンの循環定理を導く際に用いられる。

ストークスの定理 (Stokes' law)

閉曲線 C を境界とする曲面 S を考える。面要素 dS に対する法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として、C と $\boldsymbol{n}$ の向きは、両者が右ねじの関係になるように定める。このとき、ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ にたいして、

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}dS = \oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s} \tag{5.79}$$

が成り立つ。これを**ストークスの定理**と呼ぶ。

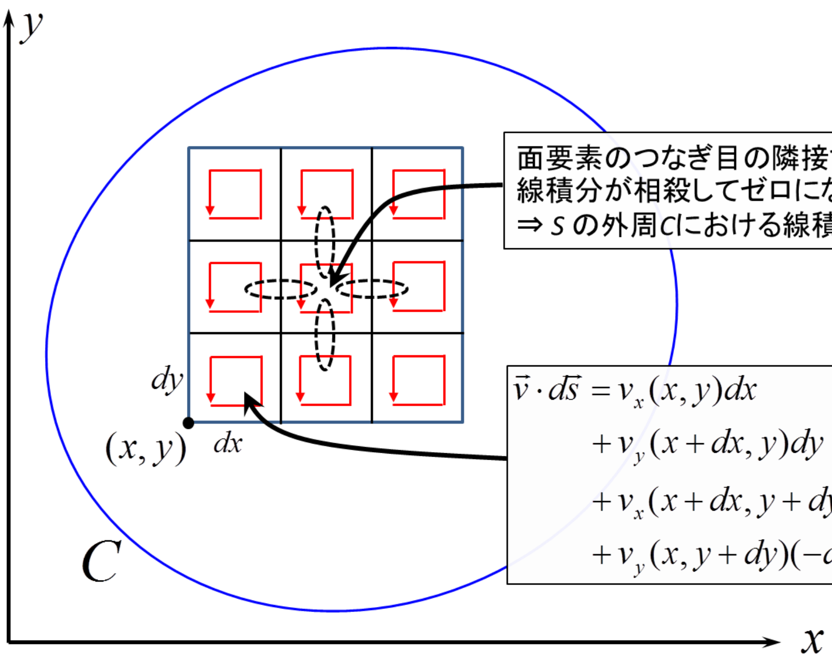

図 5.4　ストークスの定理の証明

簡略化された証明

証明は以下の通りである。曲面 S を細かく分割して、多数の長方形から構成されるようにする。長方形の辺を x 方向、y 方向に選べば、$dS = dxdy$ であり、$\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{e}}_z$ である。いま、$d\boldsymbol{s}$ を微小長方形を半時計回りにまわる方向にとり、dx^2, dy^2 を無視する。このとき $\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}$ は、線積分の方向に気をつけて計算すれば、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s} &= v_x(x,y)\,dx + v_y(x+dx,y)\,dy + v_x(x+dx,y+dy)\,(-dx) + v_y(x,y+dy)\,(-dy)\\ &= v_x dx + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x}dx\right)dy - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy\right)dx - \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy\right)dy\\ &= (\partial_x v_y - \partial_y v_x)\,dS = [\nabla\times\boldsymbol{v}]_z dS \end{aligned} \tag{5.80}$$

となる。これをすべての面要素について加えれば、面要素のつなぎ目の隣接する経路では、線積分 $\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}$ の寄与は反対符号となり打ち消し合うので、ストークスの定理が成り立つ。

より厳密な証明

上記の証明では、dx^2, dy^2 は 2 次の微小量として無視したのにも関わらず、$dS = dxdy$ は残したので、少々納得がいかないかもしれない[*20]。そこで、以下の別証明を与えておく。まず、閉曲線 C で囲まれた曲面 S を与える方程式を

$$z = f(x,y) \tag{5.81}$$

[*20] 面積要素を真面目に定義すると、$\boldsymbol{dx}$ $(\boldsymbol{dy})$ ベクトル同士が作る面は直線になることから面積要素がゼロになるので、dS の形にまとめる際に落ちる。このことに留意して上の証明を改良することで厳密な証明にすることができる。が、以下では違ったやり方で証明する。

とおく。すなわち曲面 S 上では x, y が独立変数であり、z は従属変数であるとする。この準備のもとで、

$$\int_S (\nabla \times v^x \hat{\boldsymbol{e}}_x) \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_S \epsilon_{ijk} (\partial^i (v^x \hat{\boldsymbol{e}}_x)^j) n^k dS = \int_S \left(\frac{\partial v^x}{\partial z} n^y - \frac{\partial v^x}{\partial y} n^z \right) dS \tag{5.82}$$

を計算する。

曲面 S 上の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}_S = (x, y, z) = (x, y, f(x, y))$ である。これを y で偏微分すると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_S}{\partial y} = \left(0,\ 1,\ \frac{\partial f}{\partial y} \right) \tag{5.83}$$

となるが、これは曲面 S に接している。すなわち S の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と直交しているので、$\boldsymbol{n} \cdot (\partial \boldsymbol{r}_S / \partial y) = 0$ より、

$$n^y = -\frac{\partial f}{\partial y} n^z = -\frac{\partial z}{\partial y} n^z \tag{5.84}$$

が得られる。これを (5.82) 式に代入すれば、

$$\int_S (\nabla \times v^x \hat{\boldsymbol{e}}_x) \cdot \boldsymbol{n} dS = -\int_S \left(\frac{\partial v^x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial v^x}{\partial y} \right) n^z dS \tag{5.85}$$

となる。

積分範囲の S 上では、$v^x = v^x(x, y, z) = v^x(x, y, z(x, y))$ であるから、

$$\left. \frac{\partial v^x}{\partial y} \right|_S = \frac{\partial v^x}{\partial y} + \frac{\partial v^x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \tag{5.86}$$

となる (演習問題 1.7 参照)。また、$n^z dS = dxdy$ (ガウスの定理の証明参照) であるから、

$$\int_S (\nabla \times v^x \hat{\boldsymbol{e}}_x) \cdot \boldsymbol{n} dS = -\int_S \left. \frac{\partial v^x}{\partial y} \right|_S dxdy \tag{5.87}$$

となる。ここで、グリーンの定理の 2 次元版 (5.77) において $\nabla^2 = \partial^2 / \partial y^2$, $\partial / \partial n = \partial / \partial y$ の場合を考え、$g = 1$, $\partial f / \partial y = v^x$ とすると、

$$\int_S (\nabla \times v^x \hat{\boldsymbol{e}}_x) \cdot \boldsymbol{n} dS = -\int_S \left. \frac{\partial v^x}{\partial y} \right|_S dxdy = \oint_C v^x dx = \oint_C v^x \hat{\boldsymbol{e}}_x \cdot d\boldsymbol{s} \tag{5.88}$$

となる。y, z 方向についても同様に示せるので、辺々加えればストークスの定理が証明できる。

5.A　5 章の演習問題

演習問題 5.1：(重要) 応力テンソルの対称性

1. モーメントの釣り合いを考え、応力テンソルは対称テンソルであることを示せ。
2. (5.49) 式では、応力が面積力であることをふまえ、応力によるモーメントを正しく

$$\int_S [\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{T}]_i dS = \int_S \epsilon_{ijk} x^j (\tau^{kl} n_l) dS \tag{5.89}$$

　と評価した。一方、ガウスの定理を用いて体積分にした表式

$$\int_S \tau^{kl} n_l dS = \int_V \partial_l \tau^{kl} dV \tag{5.90}$$

を用いると、応力のモーメントは

$$\int_V \epsilon_{ijk} x^j (\partial_l \tau^{kl}) dV \tag{5.91}$$

となる。この表式は間違いであるが、この場合にはモーメントの釣り合いからどのような結果が得られるかを示せ。

ヒント： 部分積分すると

$$\int_V \epsilon_{ijk} x^j (\partial_l \tau^{kl}) dV = \int_V \epsilon_{ijk} \partial_l (x^j \tau^{kl}) dV - \int_V \epsilon_{ijk} \tau^{kl} (\partial_l x^j) dV \tag{5.92}$$

となるが、右辺第 1 項は (5.49) 式に表れるものと同じであるからそれに沿って計算すればよい。違いは右辺第 2 項であるから、これを計算してその帰結を調べる。

演習問題 5.2：ガウスの定理の応用

ガウスの定理を用いて、

$$\int_V \nabla \times \boldsymbol{W} dV = \int_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{W} dS \tag{5.93}$$

を示せ。

略解： レビ・チビタ記号を用いて左辺の被積分関数を $(\nabla \times \boldsymbol{W})^i = \epsilon^{ijk} \partial_j W_k$ と成分表示すると、

$$\int_V \epsilon^{ijk} \partial_j W_k dV = \int_V \partial_j (\epsilon^{ijk} W_k) dV = \int_S \epsilon^{ijk} W_k n_j dS = \int_S \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{W}\, dS \tag{5.94}$$

演習問題 5.3：グリーンの積分公式の応用

1. グリーンの第 2 積分公式 (5.76) において $g = f$ とする。f がラプラス方程式を満たすとき、

$$\int_V (\nabla f)^2 dV = \int_S f \frac{\partial f}{\partial n} dS \tag{5.95}$$

となることを示せ。

2. もし境界面 S で f または $\partial f / \partial n$ が 0 になるという境界条件を満たすとき、V の内部のいたるところで $f =$ 一定 でなければならないことを示せ。これより、特に S で $f = 0$ であるならば、V の内部のいたるところで $f = 0$ となることを示せ。
3. ラプラス方程式 $\nabla^2 f = 0$ に対し、境界条件として、S における f の値が指定されている。この同一の境界条件から、f_1, f_2 の 2 つの解が得られたと仮定する。このとき、$f_1 = f_2$, すなわち、解が 2 つ得られたと仮定してもそれらは一致してしまうことになり、与えられた境界条件のもとでのラプラス方程式の解は唯一に決まることを示せ。

略解：

1. 省略。
2. 境界面 S で f または $\partial f / \partial n$ が 0 になるとき、(5.95) 式の右辺は 0 になる。一方右辺は、$(\nabla f)^2 \geq 0$ であるから、常に $\int_V (\nabla f)^2 dV \geq 0$。等号が成り立つのは $\nabla f = 0$ の場合で、このとき V の内部で $f =$ 一定。特に境界で $f = 0$ ならば、V の内部で $f = 0$。
3. $f = f_1 - f_2$ とする。$\nabla^2 f_1 = 0$, $\nabla^2 f_2 = 0$ を辺々引くと、f もまたラプラス方程式の解であり、境界面 S における境界条件 $f = 0$ を満たす。すると前問 2. の議論が適用できて、f は V 内で 0 でなければならない。$f = f_1 - f_2$ であったから、V 内で $f_1 = f_2$。

演習問題 5.4： (重要) アルキメデスの原理

1. 密度が圧力のみの関数 $\rho = \rho(P)$ であるとき、(5.56) 式が成り立つことを示せ。
2. z 方向の一様な重力場で静止する非圧縮性の流体を考える。体積 V の境界での面積力 $\boldsymbol{F}^S$ が V 内の質量を M_V として、$F_i^S = \delta_{iz} g M_V$ となることを示せ。
3. アルキメデスの原理を証明せよ。

略解：

1. (5.54) 式を ρ で割って、

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x^i} + K^i = 0 \tag{5.96}$$

第 1 項の積分について。$P = P(\rho)$ の場合、これを逆に解いて $\rho = \rho(P)$ は圧力のみの関数。$dP/\rho = (1/\rho)(\partial P/\partial x^i)dx^i$ であるから、第 1 項の積分は、

$$-\int -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x^i}dx^i = -\int \frac{dP}{\rho} \tag{5.97}$$

となる。K^i 項の積分とあわせれば (K^i 項の積分は各自で行うこと)、(5.56) 式を得る。レポートでは、P **が密度だけの関数ではない場合には、上の議論のどこが成り立たなくなるのか**を考察すること。

2. 非圧縮性の流体の場合には、$\rho =$ 一定 より、(5.56) 式の第 1 項が積分できて、

$$\int \frac{dP}{\rho} = \frac{P}{\rho} \tag{5.98}$$

となる。一様な重力場では単位質量あたりのポテンシャルエネルギーは $U = gz$. (5.56) 式の C を P_0/ρ とおくと、$P = P_0 - \rho g z$. 面積力の定義より、

$$\begin{aligned} F_i^S &= \int_S (-P\delta_{ij})n^j dS = -\int_S P n_i dS = -\int_V (\partial_i P) dV \\ &= \delta_{iz}\int_V \rho g dV = \delta_{iz} g \int_V \rho dV \\ &= \delta_{iz} g M_V \end{aligned} \tag{5.99}$$

ここで V 内の質量を $M_V = \rho V$ とした。

3. 前問 2. の結果より、V 内が流体で満たされていれば、面積力 $F_i^S = \delta_{iz} g M_V$ と重力 $-\delta_{iz} g M_V$ の合力はゼロである。ここで、体積 V で質量 M の鉄球を流体においたとする。領域 V すなわち鉄球に働く面積力は、その定義より前問 2. の場合と同じで

$$\int_S (-P\delta_{ij})n^j dS = \delta_{iz} g \rho V \tag{5.100}$$

である。よって、鉄球に働く合力は、$-\delta_{iz}(M - \rho V)g$, すなわち、鉄球が押しのけた流体の重力に等しい浮力 $(+\rho V g)$ を受けることになる (アルキメデスの原理)。

演習問題 5.5： 回転するバケツ中の水の水面の形

1. 一様重力場中、角速度 ω で回転するバケツに入れられた水に働く、単位質量あたりの体積力のポテンシャルは、

$$U = gz - \frac{1}{2}\omega^2 R^2 \tag{5.101}$$

であたえられることを示せ。ここで $R \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ は z 軸からの水平距離である。

2. 水面の形が回転放物面になることを示せ。

略解：

1. 重力ポテンシャルは重力 $-mg$ を積分して mgz、遠心力ポテンシャルは遠心力を積分して $-\dfrac{1}{2}mR^2\omega^2$. よって、単位質量あたりの体積力のポテンシャルは、$U = gz - \dfrac{1}{2}\omega^2 R^2$.
2. (5.57) 式より、
$$P = C - \rho gz + \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2. \tag{5.102}$$
ここで、$z = 0$, $R = 0$ をポテンシャルの原点にとると、$z = 0$, $R = 0$ では水の圧力 $P = C$ が大気圧 P_0 と釣り合っているので、$C = P_0$. バケツの水面の形は、水面の各流体要素における流体の圧力 P と大気圧 P_0 との釣り合いで決まるから、$P = P_0$ として、
$$z = \frac{\omega^2}{2g}R^2 \tag{5.103}$$
よって水面は放物線を回転させた形状になる。

演習問題 5.6： (重要) ラグランジュ的記述とオイラー的記述

ラグランジュ的記述とオイラー的記述の違いを説明せよ。また、時間 Δt の間の流体素片の運動を考えれば、ラグランジュ的記述における物理量の自然な変化が (5.59) 式で与えられることを説明し、ラグランジュ微分が (5.61) 式となることを示せ。

演習問題 5.7： (加点問題) シャンパン (ビール) の泡のパラドックス?

アルキメデスの原理により、シャンパンの泡には泡が押しのけたシャンパンの重さに等しい浮力が働く。シャンパンの密度 ρ_C は泡の密度 $\rho_B \approx 1\,\mathrm{kg/m^3}$ の約 1000 倍である ($\rho_C \approx 1000\rho_B$)。このとき、シャンパンの泡の体積を V として、重力と浮力のみを考慮して泡の運動方程式をたてると
$$(\rho_B V)\ddot{z} = -(\rho_B V)g + (\rho_C V)g \;\approx\; +999(\rho_B V)g \;\approx\; 1000\,(\rho_B V)g \tag{5.104}$$
より、$\ddot{z} \approx 1000g$ となるので、シャンパンの泡はおよそ $1000g$ もの加速度で急上昇することになる。しかし、現実のシャンパンの泡はもっとゆっくりと上昇する。この矛盾の解決に挑戦してほしい。

出題の意図：
物理的な思考力や論理性などのセンスを磨くための問題であるので、完全な解答は求めていない。どういうことかというと、例えば、「実際には粘性抵抗が働くため、**この効果を考慮すれば**もっとゆっくりと上昇する」と解答するのであれば、粘性抵抗の値を評価して、粘性抵抗だけで本当に「もっとゆっくりと上昇する」という結果が得られるか、その妥当性の吟味をできるだけ定量的に行い、「**だから**、粘性抵抗を考慮すればパラドックスは解決される」という結論を導けるか、という物理学者の思考法に挑戦してほしいわけである。

抵抗力だけでは説明できないこともありうる。この場合には、「何か別要因が必要である」という結論でとどまってもよいし、興味があれば「さらなる探求」(大加点問題) を進めてもよい[*21]。どうするかは各自の興味に任せるが、**抵抗力を考慮するだけで十分かどうかは少なくとも議論すること**[*22]。

抵抗力について：
泡には粘性抵抗と慣性抵抗の 2 つの抵抗力[*23]がはたらくことが考えられる。

[*21] 前者の結論も物理的に十分評価できるものである。後者の「さらなる探求」まではまったく求めないが、もしも挑戦するのであれば、恒藤敏彦著「物理入門コース 8 弾性体と流体」(岩波書店) の 4-3 節などが参考になるだろう。

[*22] 議論の出発点として、適切な a の値を設定して終端速度を求めてみよ。

[*23] 以下に示す粘性抵抗と慣性抵抗の表式も、物理的な考察によって (数係数を除いて) 導くことができる。慣性抵抗については、例えば、藤原邦男著「物理学序論としての力学」(東京大学出版) 3.2 節を参照されたい。アインシュタインはこのような物理的考察の天才であった。

シャンパンの泡を半径 a の球体とみなすとすると[*24]、粘性抵抗 f_V は[*25]、泡の速度を v として、

$$f_V = 6\pi a \eta v \qquad \text{(ストークスの法則)} \tag{5.105}$$

で与えられる。ここで、η は粘性係数と呼ばれ、シャンパンに近い水の場合には $\eta \approx 1.0 \times 10^{-3}$ kg·/m/s である。一方、慣性抵抗 f_I は[*26]、シャンパンの密度を ρ_C として、

$$f_I = \frac{1}{4}\pi \rho_C a^2 v^2 \qquad \text{(ニュートンの法則)} \tag{5.106}$$

で与えられる。

演習問題 5.8： (加点問題) 積分定理

講義ノートを参考に、ガウスの定理とストークスの定理を証明せよ。丸写しにならないようにできるだけ注意すること。

[*24] a の値は問題に応じて各自で設定する必要がある。a を決めれば体積 V も決まる。
[*25] 添字 V は粘性 (**V**iscosity) による。
[*26] 添字 I は慣性 (**I**nertia) による。

第 6 章

保存則と支配方程式

物理学では保存則が重要である。流体力学および連続体力学においても、質量、エネルギー、運動量そして角運動量の保存則が存在し、それらが密度場、速度場、温度場などの場の方程式になっている。

6.1 質量保存則

6.1.1 オイラー的記述における連続の式

連続体 (流体) 中に、空間に固定された任意の閉曲面 S をとり、その内部領域を V とする。質量が保存するということは[*1]、領域 V の内部の質量の増減分は、S を通して外部から流出入する質量と等しくなっていなければならない。これを数学的に定式化すれば、質量保存則が得られる。

V の全質量が、時間 Δt の間に、

$$\Delta M_V = \Delta \int_V \rho dV \tag{6.1}$$

だけ増加したとする。これが S を通して流入する質量に等しい (図 6.1 参照)。

S の**外向き**単位法線ベクトル場を $\boldsymbol{n}$ として、流体の速度ベクトル場を $\boldsymbol{v}$ とすると、$-\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = -v^i n_i$ が S に垂直な**内向き**方向の流体の速度成分である。したがって、流体は時間 Δt の間には $\Delta t(-v^i n_i)$ 進む。これより、時間 Δt の間に、S 上の面要素 dS から流入する流体の体積は、$\Delta t(-v^i n_i)dS$ であることが分かる。密度 ρ をかけて S で積分すれば、

$$\Delta M_S = -\Delta t \int_S \rho v^i n_i dS = -\Delta t \int_V \partial_i (\rho v^i) dV \tag{6.2}$$

が時間 Δt の間に S を通して流入する質量である。

$\Delta M_V = \Delta M_S$ (質量保存則) として両辺 Δt で割ると、

$$\frac{\Delta \int_V \rho dV}{\Delta t} = -\int_V \partial_i (\rho v^i) dV \tag{6.3}$$

となる。ここで $\Delta t \to 0$ の極限では左辺は時間微分になるが、オイラー的記述ではこの微分は偏微分となる。つまり、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = -\int_V \partial_i (\rho v^i) dV \quad \Longrightarrow \quad \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho v^i) \right] dV = 0 \tag{6.4}$$

これが任意の V について成り立つためには、密度の発展方程式が

[*1] ここでは V の内部に質量の湧き出し口のようなものはないと仮定している。

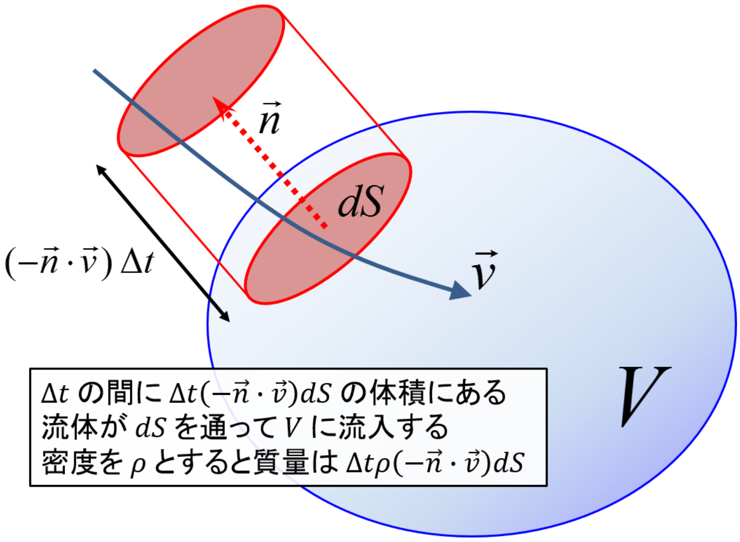

図 6.1　流体の質量保存則の概要図

オイラー的記述における連続の式 (質量保存則)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}(\rho v^i)=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0 \tag{6.5}$$

となることがわかる。これは**質量保存則の微分形**であり、**連続の式**と呼ばれる。

一方、$\Delta M_V=\Delta M_S$ そのものから得られる

質量保存則の積分形

$$\Delta\int_V\rho dV+\Delta t\int_S\rho v^i n_i dS=0 \tag{6.6}$$

を**質量保存則の積分形**とよぶ。

S を通じて流出入する $\rho v^i n_i dS$ を、単位時間に dS を $\boldsymbol{n}$ 方向に通過する質量の流れといい、$\boldsymbol{j}_\rho\equiv\rho\boldsymbol{v}$ を**密度フラックス**と呼ぶ。

(6.5) 式のように、**物理量 (この場合は密度) の時間変化が、フラックス (この場合は密度フラックス) の発散で与えられる場合に、方程式は「保存形」である**という。その理由は、保存形の方程式は、ガウスの定理を利用して、(保存則の考え方を直接反映した) 積分形の方程式に直ちに書き換えることができるからである。

出席課題 S.6.1*： 考え方の基となる図を含め、オイラー的記述において、質量保存則から連続の式を導出せよ。

6.1.2　ラグランジュ的記述における質量保存則

ラグランジュ微分 (5.61) を用いて連続の式 (6.5) を書き換えよう。単純計算より、

ラグランジュ的記述における連続の式

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{6.7}$$

が直ちに得られる。

ラグランジュ的記述における連続の式の意味について考えよう。ラグランジュ的記述では、流体素片 (流体粒子) を追跡するが、この流体粒子は、体積変化はするものの、その質量は保存する (粒子的概念)。すなわち、ラグランジュ的記述では、質量保存則とは、

$$\Delta_L M = 0 \tag{6.8}$$

である。ここで添字 L はラグランジュ (Lagrange) 的記述における流体素片の質量変化であることあらわすためにつけた。流体素片の密度を ρ, 体積を V とすると、質量保存則 (6.8) 式は、

$$\Delta_L(\rho V) = (\Delta_L\rho)V + \rho(\Delta_L V) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\Delta_L\rho}{\rho} = -\frac{\Delta_L V}{V} \tag{6.9}$$

となる。

ここで、追跡している流体素片を微小直方体で近似する。いま、微小時間 Δt の間に、流体素片の運動に伴って、直方体の各辺が $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$ だけ変化したとすると、その体積は、微小量の 1 次までで

$$\frac{\Delta_L V}{V} = \frac{(x+\Delta x)(y+\Delta y)(z+\Delta z) - xyz}{xyz} \approx \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z} \tag{6.10}$$

だけ変化する。単位時間あたりでは、

$$\frac{1}{V}\frac{\Delta_L V}{\Delta t} \ = \ \frac{1}{x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{1}{y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{1}{z}\frac{\Delta z}{\Delta t} \ \approx\ \frac{v_x}{x} + \frac{v_y}{y} + \frac{v_z}{z} \tag{6.11}$$

だけ変化する。

ラグランジュ的記述で追跡している直方体の流体素片自体が微小であることを考慮すれば、

$$\frac{v_x}{x} \approx \frac{\partial v_x}{\partial x}, \qquad \frac{v_y}{y} \approx \frac{\partial v_y}{\partial y}, \qquad \frac{v_z}{z} \approx \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{6.12}$$

と近似できるので (演習問題 6.5)、結局、

$$\frac{1}{V}\frac{\Delta_L V}{\Delta t} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{6.13}$$

となる。この結果より、$\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ **は体積変化率に等しい**ことが分かる。

(6.13) 式を (6.8) 式に代入すると、

$$\frac{1}{\rho}\frac{\Delta_L\rho}{\Delta t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{6.14}$$

が得られる。これは $\Delta t \to 0$ の極限で

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{6.15}$$

となるが、これはラグランジュ的記述における連続の式そのものであり、追跡している流体素片の体積が変化した分だけ、流体素片の密度が変化するという質量保存則を意味している。

出席課題 S.6.2：　ラグランジュ的記述における質量保存則 (6.8) からラグランジュ的記述における質量保存則 (6.15) を導け。

6.2 運動量保存則

6.2.1 運動量保存則としての運動方程式

Newton 力学における運動方程式は、力のつり合いの式に慣性力を加えることで得られた (ダランベール (d'Alembert) の原理)。その基礎にあるのは、「運動量の変化 $(\Delta\boldsymbol{p})$=力積 $(\boldsymbol{F}\Delta t)$」という運動量保存則である。実際、両辺を Δt で割って、$\Delta t \to 0$ の極限を考えれば、運動方程式 $\dot{\boldsymbol{p}} = m\ddot{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{F}$ が得られる。この意味で、運動方程式は、単位時間あたりの運動量変化があれば、それは力が働いた結果であるということを主張している。

同様に、連続体力学における運動方程式も、5.5.1 節で導いた力のつり合いの式と、力以外の原因による運動量の変化を組み合わせることで得られる。まず、力が働いていない場合を考える。連続の式を導いたときと同様に、V の全運動量が、時間 Δt の間に、

$$\Delta \int_V \rho v^i dV \tag{6.16}$$

だけ増加したとすると、運動量保存則より、これが S を通して流入する運動量

$$-\Delta t \int_S \rho v^i v^j n_j dS = -\Delta t \int_V \partial_j (\rho v^i v^j) dV \tag{6.17}$$

に等しいはずであるから、

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^i v^j) \right] dV = 0 \tag{6.18}$$

が得られる。

上式は流体素片に力が働いていない場合に成り立つ関係式である。力が働いている場合には、ダランベールの原理より、体積力と面積力の合力を考慮して、

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^i v^j) \right] dV = \int_V \left[\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x^j} + \rho K^i \right] dV \tag{6.19}$$

となる。これが任意の V で成り立つことから、運動方程式 (運動量保存則) は

オイラー的記述における運動方程式 (運動量保存則)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^i v^j) = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x^j} + \rho K^i \tag{6.20}$$

となる。

6.2.2 ラグランジュ的記述からの考察

運動方程式 (6.20) をラグランジュ微分を用いて書き換えよう。左辺は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^i v^j) &= v^i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^j) \right] + \rho \left[\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right] \\ &= \rho \frac{D v^i}{D t} \end{aligned} \tag{6.21}$$

と変形できる。ここで、v^i でくくった項を連続の式を用いて消去し、ρ でくくった v^i の微分をラグランジュ微分を用いて書きかえた。

これより、運動方程式は、

ラグランジュ的記述における運動方程式

$$\rho\frac{Dv^i}{Dt}=\frac{\partial\tau^{ij}}{\partial x^j}+\rho K^i \tag{6.22}$$

となる。ここで、ラグランジュ部分が流体素片を追跡する形での時間微分であったことを考慮すると、Newton の運動方程式に近い形であることが分かる。

しかし、運動量保存則はあくまでも「運動量の変化 $(\Delta\boldsymbol{p})$=力積 $(\boldsymbol{F}\Delta t)$」でなければならないので、(6.22) 式の左辺は、$D(\rho v^i)/Dt$ でなければならないように思われる。一般に ρ は時間変化するから D/Dt の外に出すことはできない。この違いは、以下のような理由によるものである。

オイラー的記述では、空間に S を固定していた。一方、ラグランジュ的記述では、流体素片を追跡しながら運動を記述しなければならない。そのため、ラグランジュ的記述では、空間に固定された V ではなく、流体の運動に伴って V も変形させながら追跡する必要がある。また、保存則が積分形式で与えられている点も重要となっている。以下でその詳細について述べる。

密度を重みとする積分量のラグランジュ微分

いま、ある物理量 f の V における積分

$$I(V,t)\equiv\int_V F(\boldsymbol{x},t)dV \tag{6.23}$$

について、ラグランジュ微分の定義にしたがって DI/Dt を求める。流体の運動に伴って I の積分範囲 V が変わることに注意すると、

$$\begin{aligned}\frac{DI}{Dt}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{I(V+\Delta V,t+\Delta t)-I(V,t)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{V+\Delta V}F(\boldsymbol{x},t+\Delta t)dV-\int_V F(\boldsymbol{x},t)dV\right]\end{aligned} \tag{6.24}$$

を計算すればよいことが分かる。ここで、積分の中の $F(\boldsymbol{x},t)$ の引数 $\boldsymbol{x}$ は、積分の仮変数であるから、

$$\frac{DI}{Dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_{V+\Delta V}F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}\Delta t,t+\Delta t)dV-\int_V F(\boldsymbol{x},t)dV\right] \tag{6.25}$$

とは**ならない**ことに注意しよう。

さて、Δt の間に流体素片は $\boldsymbol{v}\Delta t$ だけ動くから、$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}\Delta t$ なる変換を行えば、積分範囲を同一にできるはずである。そのヤコビアン (Jacobian) $|J|$ は Δt の 1 次までで、

$$|J|=\frac{\partial(x^i)}{\partial(x'^j)}=\frac{\partial(x'^i+v^i\Delta t)}{\partial x'^j}=1+\Delta t\frac{\partial v^i}{\partial x'^i} \tag{6.26}$$

となる (演習問題)。したがって、(6.24) 式は、

$$\begin{aligned}
\frac{DI}{Dt} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_V F(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{v}\Delta t, t+\Delta t)|J|dV' - \int_V F(\boldsymbol{x},t)dV\right] \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_V F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}\Delta t, t+\Delta t)(1+\Delta t\partial_i v^i)dV - \int_V F(\boldsymbol{x},t)dV\right] \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_V \left\{\big(F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}\Delta t, t+\Delta t) - F(\boldsymbol{x},t)\big) + F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}\Delta t, t+\Delta t)\Delta t\partial_i v^i\right\}dV\right] \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\int_V \left\{\big(F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}\Delta t, t+\Delta t) - F(\boldsymbol{x},t)\big) + F(\boldsymbol{x},t)\Delta t\partial_i v^i + O(\Delta t^2)\right\}dV\right] \\
&= \int_V \left[\frac{DF}{Dt} + F(\boldsymbol{x},t)\partial_i v^i\right]dV = \int_V\left[\frac{\partial F}{\partial t} + \partial_i(Fv^i)\right]dV
\end{aligned} \tag{6.27}$$

となる。2 番目の等号では $\boldsymbol{x}' \to \boldsymbol{x}$ への積分変数のラベル替えを行なっている。

ここで、$F \equiv \rho f$ とおいて単位質量あたりの物理量 f を定義すると、

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho f dV = \int_V \left[f\left\{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho v^i)\right\} + \rho\left\{\frac{\partial f}{\partial t} + v^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\right\}\right]dV = \int_V \rho\frac{Df}{Dt}dV \tag{6.28}$$

となる。この結果は重要なので公式として覚えておこう。

密度を重みとする積分量のラグランジュ微分の公式

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho f dV = \int_V \rho\frac{Df}{Dt}dV \tag{6.29}$$

運動量保存則とラグランジュ的記述における運動方程式の整合性

運動量保存則にはなしを戻そう。運動量の変化をラグランジュ的記述で表すと、$\displaystyle\frac{D}{Dt}\int_V \rho v^i dV$ であるが、(6.29) 式より、これが $\displaystyle\int_V \frac{D}{Dt}(\rho v^i)dV$ とはならずに $\displaystyle\int_V \rho\frac{Dv^i}{Dt}dV$ となるために、運動量保存則

$$\text{運動量の変化}\,(\Delta \boldsymbol{p}) \;=\; \text{力積}\,(\boldsymbol{F}\Delta t) \tag{6.30}$$

から導かれる方程式は、

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho v^i dV = \int_V\left[\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x^j} + \rho K^i\right]dV \quad\Longrightarrow\quad \rho\frac{Dv^i}{Dt}dV = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x^j} + \rho K^i \tag{6.31}$$

となるのである。これは (6.22) 式と一致する。

ところで、(6.27) 式は簡単な物理的解釈を与えることができる。いま、膨張している流れを考えよう。すると $t = 0$ での閉曲面 (境界)S_0 の各点は、時間 Δt の後には、$\boldsymbol{v}\Delta t$ だけ拡がる。これをオイラー的記述から見ると、S を通して速度 $\boldsymbol{v}$ で物質が流入してくるように見えるはずである。すなわち、

$$\frac{D}{Dt}\int_V F dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_V F dV + \int_S F v^i n_i dS \tag{6.32}$$

である。右辺第 2 項にガウスの定理を用いれば、(6.27) が得られる。

6.2.3 運動量フラックス

運動量保存則 (6.19) から、運動量 (運動量密度) フラックスがどのように表されるかを考えよう。そのためには、質量保存のときと同様に、S を単位時間あたりに通過する運動量 (運動量密度) の流れを考えれば

良い。運動量保存則 (6.19) を

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i)dV + \int_S \left(\rho v^i v^j - \tau^{ij}\right)n_j dS = \int_V \rho K^i dV \tag{6.33}$$

のように、積分形に書きなおそう。すると、

$$\left(\rho v^i v^j - \tau^{ij}\right)n_j dS \tag{6.34}$$

が S を $\boldsymbol{n}$ 方向に通過する運動量の流れに対応していることがわかる。

$$\boldsymbol{j}_{p^i} = \rho v^i v^j - \tau^{ij} \tag{6.35}$$

は運動量の i 成分の (運動量) フラックスである。

運動量フラックスは 2 つの部分からなる。$\rho v^i v^j n_j$ は通常の運動量 (運動量密度) のフラックスである。応力 $\tau^{ij} n_j$ の部分は、応力が働くことによる力積の流れである。

外力のない場合には、運動量保存則は保存形のかたちになる。これは、外力のない場合には、流体は孤立系であるとみなせるので、全運動量が保存することと整合的である。

出席課題 S.6.3： $\tau^{ij} n_j$ が応力が働くことによる力積の流れを表すことを説明せよ。
略解 (6.17) 式の議論まで立ち返って考えると、(6.33) 式より、Δt の間に表面 dS を通る運動量の流れは、

$$\Delta t\left(\rho v^i v^j - \tau^{ij}\right)n_j dS \tag{6.36}$$

で与えられることが分かる。ここで、$-\tau^{ij} n_j dS$ は dS にはたらく応力であるから、$-\tau^{ij} n_j dS\Delta t$ は dS にはたらく力積 (dS を通る力積の流れ) である。

6.3 角運動量保存則

ラグランジュ的記述を採用して、角運動量の保存則について考えよう[*2]。領域 V の内部の全角運動量 (の i 成分) の時間変化は、(6.29) 式より、

$$\frac{D}{Dt}\int_V \left[\boldsymbol{x} \times (\rho \boldsymbol{v})\right]_i dV = \epsilon_{ijk}\int_V \rho \frac{D}{Dt}(x^j v^k)dV \tag{6.37}$$

である。一方、V に働くモーメントは、(5.48), (5.49) 式より、

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk}\int_V \left[\partial_l(x^j \tau^{kl}) + \rho x^j K^k\right]dV &= \epsilon_{ijk}\int_V \left[x^j\left(\partial_l \tau^{kl} + \rho x^j K^k\right) + \tau^{kj}\right]dV \\ &= \epsilon_{ijk}\int_V \left[x^j \rho \frac{Dv^k}{Dt} + \tau^{kj}\right]dV \end{aligned}\tag{6.38}$$

となる。ここで、最後の等号で運動量保存則を用いた。

(6.37), (6.38) 式より、角運動量保存則は、

$$\begin{aligned}0 &= \epsilon_{ijk}\left[\rho\frac{D}{Dt}(x^j v^k) - \left\{x^j \rho \frac{Dv^k}{Dt} + \tau^{kj}\right\}\right] = \epsilon_{ijk}\left[\rho v^k \frac{Dx^j}{Dt} + \rho x^j \frac{Dv^k}{Dt} - \left\{x^j \rho \frac{Dv^k}{Dt} + \tau^{kj}\right\}\right] \\ &= \epsilon_{ijk}\left[\rho v^k v^j - \tau^{kj}\right] = \epsilon_{ijk}\tau^{jk}\end{aligned}\tag{6.39}$$

となる。ここで $Dx^j/Dt = v^j$ および $\epsilon_{ijk} v^k v^j$ を用いた。これより、τ^{jk} が対称テンソルであれば、角運動量が保存することがわかる[*3]。

[*2] オイラー的記述における角運動量保存則は、オイラー的記述の運動量方程式と $\boldsymbol{x}$ との外積をとれば得られる (演習問題)。
[*3] これはモーメントのつり合い条件でもある

6.4　エネルギー保存則

6.4.1　力学的エネルギー方程式

ニュートンの運動方程式から力学的エネルギーの保存則を導いたのと同様の手続きを、流体の運動方程式について行ってみよう。運動方程式 (6.22) 式に v_i を作用させて和をとると、

$$\rho v_i \frac{\partial v^i}{\partial t} + \rho v_i v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} = v_i \frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x^j} + \rho v_i K^i \tag{6.40}$$

となる。左辺は、

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{1}{2}\Big[\partial_t\big(\rho v_i v^i\big) - v_i v^i \partial_t \rho\Big] + \Big[v_i \rho v^j \big(\partial_j v^i\big)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[\partial_t\big(\rho v_i v^i\big) + v_i v^i \partial_j\big(\rho v^j\big)\Big] + \frac{1}{2}\Big[\rho v^j \partial_j \big(v_i v^i\big)\Big] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i\right) v^j\right]\end{aligned} \tag{6.41}$$

となる。ここで、各等号で微分の公式 $d(fg) = (df)g + f(dg)$ を用い[*4]、2 番目の等号では連続の式を用いた。

すなわち、(6.41) 式の左辺は運動エネルギー密度 $e_K \equiv \rho v^2/2 = \rho v^i v_i/2$ について連続の式と同じ形になっており、力学的エネルギーが満たすべき式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i\right) v^j\right] = v_i \frac{\partial \tau^{ij}}{\partial x^j} + \rho v_i K^i \tag{6.42}$$

となる。この式は、しかし、外力 K^i がない場合でも[*5]、右辺の $v_i \partial_j \tau^{ij}$ の存在のため、運動エネルギーだけでは保存形となっていない。このことは、流体のエネルギー保存則を考えるためには、流体の持つ内部エネルギーも考慮にいれなければならないことを示唆している。

出席課題 S.6.4：　(6.41) 式を示せ。式変形について具体的に説明すること。

出席課題 S.6.5：　ニュートンの運動方程式 $\dot{\boldsymbol{p}} = -\nabla U$ から、次の力学的エネルギーの保存則を導け。

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + U = \text{一定} \tag{6.43}$$

略解　運動方程式と微小変位 $d\boldsymbol{x}$ との内積をとる。$\ddot{\boldsymbol{x}} \cdot d\boldsymbol{x} = d\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^2\right)$、$(\nabla U) \cdot d\boldsymbol{x} = dU$ であるから、運動方程式より、

$$d\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U\right) = 0 \tag{6.44}$$

両辺積分すれば力学的エネルギー保存則を得る。

6.4.2　応力が作用する場合の熱力学第 1 法則

流体の内部エネルギーの保存について考えるためには、単位質量あたりの熱力学量についての熱力学第 1 法則

$$du = T ds - P d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \delta q - P d\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{6.45}$$

[*4] $df(x^k) = dx^k \partial_k f$ の両辺を dt で割ると、$df/dt = (v^k \partial_k) f$ となるから、$v^k \partial_k$ は 1 つの微分演算子とみなせる。$\rho v^k \partial_k$ も同様に微分演算子とみなせる。

[*5] 外力がない場合には系は孤立系とみなせるので、**全**エネルギーが保存するはずである。

において (演習問題 6.4)、外部圧力が流体にする仕事項 $Pd\,(1/\rho)$ を一般の応力の場合に拡張することが必要である。ここで、u, s は単位質量あたりの内部エネルギー及びエントロピー、$\delta q = Tds$ は単位質量あたりの熱による仕事である。

そのために、流体の変形に伴う仕事を計算しよう。いま、つり合いの状態にある流体の閉曲面 S に囲まれた領域 V を考える。応力の作用によって、V の各点が微小変位 δs^i だけ変化したとする。このときに外力がする仕事は、

$$\int_V \delta W dV = \int_S \tau^{ij} n_j \delta s_i dS + \int_V \rho K^i \delta s_i dV = \int_V \Big[\partial_j\big(\tau^{ij}\delta s_i\big) + \rho K^i \delta s_i\Big] dV \tag{6.46}$$

となる。これが任意の積分領域で成り立つから、

$$\delta W = \tau^{ij}\partial_j \delta s_i + \delta s_i \Big[\partial_j \tau^{ij} + \rho K^i\Big] = \tau^{ij}\partial_j \delta s_i + O(\delta s^2) \tag{6.47}$$

となる。ここで、δs^i が微小なので、変形に伴う、$\partial_j \tau^{ij} + \rho K^i$ の項のつり合い $(=0)$ からのずれは 1 次の微小量である (演習問題 6.5) ことを用いた。

ここで τ_{ij} が対称テンソルであることを用いると、$\tau^{ij}\partial_j\delta s_i = \tau^{ji}\partial_j \delta s_i = \tau^{ij}\partial_i \delta s_j$ であるから、

$$\delta W = \tau^{ij}\partial_j \delta s_i = \tau^{ij}\frac{1}{2}\left(\partial_j \delta s_i + \partial_i \delta s_j\right) = \tau^{ij}\delta\varepsilon_{ij} = \tau_{ij}\delta\varepsilon^{ij} \tag{6.48}$$

となる。ここで ε^{ij} は歪みテンソルである。すなわち、変形に伴い外力がする**単位体積あたり**の仕事が $\tau_{ij} d\varepsilon^{ij}$ となることがわかるので、**単位質量あたり**の仕事は $\dfrac{1}{\rho}\tau_{ij} d\varepsilon^{ij}$ で与えられる。熱力学第 1 法則 (6.45) において、仕事項 $-Pd\left(\dfrac{1}{\rho}\right)$ を $\dfrac{1}{\rho}\tau_{ij} d\varepsilon^{ij}$ で置き換えて、一般の応力が作用する場合の熱力学第 1 法則が得られる：

$$du = \delta q + \frac{1}{\rho}\tau^{ij} d\varepsilon_{ij} = \delta q + \frac{1}{\rho}\tau^{ij}\partial_i ds_j \tag{6.49}$$

6.4.3 内部エネルギー方程式

熱力学第 1 法則 (6.49) の微分 d を、流体素片に沿っての変化 Δ_L であるとして、さらにに両辺を Δt で割って $\Delta t \to 0$ としてラグランジュ微分に置き換えれば、

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho\frac{Dq}{Dt} + \tau^{ij}\partial_i v_j \tag{6.50}$$

となる。

ここで $\rho Dq/Dt$ は (6.21) 式と同様に計算すれば、

$$\begin{aligned}\rho\frac{Dq}{Dt} &= \rho\Big[\partial_t q + v^i \partial_i q\Big] = \partial_t(\rho q) + \partial_i\big(\rho q v^i\big) - q\big[\partial_t \rho + \partial_i(\rho v^i)\big] \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho q) + \frac{\partial}{\partial x^i}\big(\rho q v^i\big)\end{aligned} \tag{6.51}$$

となることから分かるように、**流体の流れに伴う熱の出入り**を表している。しかし、流体の流れだけではなく、外力や応力による力積も運動量の運び手となったように、熱を運ぶのは流体の流れだけに限らない[*6]。これを**熱流**と呼び $\boldsymbol{H}$ と表すことにする。熱流が存在する場合には、流体の流れに伴う熱の出入り

[*6] 例えば固体中には流れはないが、熱伝導による熱の輸送は存在する。

$-\boldsymbol{n}\cdot(\rho q\boldsymbol{v})$ だけでなく、熱流による熱の出入り $-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}$ が存在するので、S を通して熱のやりとりが行われる。熱流を考慮すると、表面 S を通した熱収支は、

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho q dV = -\int_S \left(\rho q v^i + H^i\right) n_i dS \tag{6.52}$$

となる。これより、

$$\rho\frac{Dq}{Dt} = -\partial_i H^i \tag{6.53}$$

が得られる。

一般には、流体中に熱源がある場合[*7]も考えられるので、単位質量あたりの熱放出率を $\dot{Q}$ とすれば、その寄与 $\rho\dot{Q}$ も含まれる。すなわち、

$$\rho\frac{Dq}{Dt} = -\partial_i H^i + \rho\dot{Q} \tag{6.54}$$

である。

内部エネルギー方程式の具体形を導こう。(6.50) 式の左辺も (6.51) 式と全く同様にして、

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \partial_t(\rho u) + \partial_i\left(\rho u v^i\right) \tag{6.55}$$

となるので、熱力学第 1 法則より、

$$\partial_t(\rho u) + \partial_i\left(\rho u v^i\right) = \rho\frac{Dq}{Dt} + \tau^{ij}\partial_i v_j = -\partial_i H^i + \rho\dot{Q} + \tau^{ij}\partial_i v_j \tag{6.56}$$

が得られる。さらに熱流項を移項すれば、内部エネルギー方程式は

$$\partial_t(\rho u) + \partial_i\left(\rho u v^i + H^i\right) = \rho\dot{Q} + \tau^{ij}\partial_i v_j \tag{6.57}$$

となる。

6.4.4 全エネルギー方程式

運動エネルギー方程式 (6.42) と内部エネルギー方程式 (6.57) を辺々加えると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i + \rho u\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i + \rho u\right) v^j + H^i\right] = \frac{\partial}{\partial x^j}(v_i\tau^{ij}) + \rho\left(v_i K^i + \dot{Q}\right) \tag{6.58}$$

となる。応力テンソル項を移項すれば、全エネルギー方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i + \rho u\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i + \rho u\right) v^j + H^i - v_i\tau^{ij}\right] = \rho\left(v_i K^i + \dot{Q}\right) \tag{6.59}$$

となり、内部熱源 $\dot{Q}$ と外部体積力 K^i がない場合には保存形

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i + \rho u\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i + \rho u\right) v^j + H^i - v_i\tau^{ij}\right] = 0 \tag{6.60}$$

となっている。

ここで、$\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i + \rho u\right) v^j - v_i\tau^{ij}$ は全エネルギー密度フラックスであり、$\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i\right) v^j$ は流体が運ぶ運動エネルギー密度フラックス、$(\rho u)v^j$ は流体が運ぶ内部エネルギー密度フラックス、H^j は熱流 (熱フラックス)、$\partial_j(v_i\tau^{ij})$ は面積力 (応力) のする仕事率に対応している[*8]。

[*7] 例えば核反応。

[*8] この意味で、$v_i\tau^{ij}$ は応力による仕事の流れといえる。

5.5.3 節で取り扱った完全流体の場合の応力テンソル

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} \tag{6.61}$$

の場合にはさらに物理的意味が明解になる。エネルギー保存則 (6.59) に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i + \rho u\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i + \rho u + P\right)v^j + H^j\right] = \rho\big(v_i K^i + \dot{Q}\big) \tag{6.62}$$

となるが、$\rho u + P$ がエンタルピー密度 h であることに注意すると、エネルギー保存則は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i + \rho u\right) + \frac{\partial}{\partial x^j}\left[\left(\frac{1}{2}\rho v_i v^i + h\right)v^j + H^j\right] = \rho\big(v_i K^i + \dot{Q}\big) \tag{6.63}$$

となる。

出席課題 S.6.6： $\partial_j(v_i\tau^{ij})$ が面積力のする仕事率であることを示せ。

略解　面積力の定義より、境界面 S に働く面積力は $\int_S n_j\tau^{ij}dS$。ここで、力 F^i に対して、v_iF^i が仕事率であることに注意すると、$\int_S v_i\big(n_j\tau^{ij}\big)dS = \int_V \partial_i(v_j\tau^{ij})dV$ が面積力のする仕事率。よって、$\partial_i(v_j\tau^{ij})$ は単位体積あたりの面積力の仕事率に相当する。

6.A　6 章の演習問題

演習問題 6.1： (重要) 運動量保存則と運動方程式

オイラー的記述において、体積力 K_i と応力 τ_{ij} が働いている場合に、運動量保存則から運動方程式を導け。

6.2： ヤコビアン

1. 変換 $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi}$ のヤコビアン $|J| = |\partial\boldsymbol{x}'/\partial\boldsymbol{x}|$ を $\boldsymbol{\xi}$ が微小であるとして 1 次までで求めよ。
2. (6.24) 式から (6.27) 式が成り立つことを示せ。式変形について具体的に説明すること。

略解：

1. $\partial x'^i/\partial x^j = \partial(x^i + \xi^i)/\partial x^j = \delta^i_j + \partial\xi^i/\partial x^j$ であるから、ヤコビ行列は

$$J = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\partial\xi^x}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi^x}{\partial y} & \dfrac{\partial\xi^x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\xi^y}{\partial x} & 1 + \dfrac{\partial\xi^y}{\partial y} & \dfrac{\partial\xi^y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\xi^z}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi^z}{\partial y} & 1 + \dfrac{\partial\xi^z}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{6.64}$$

よってヤコビアンは

$$\begin{aligned} |J| &= \left(1 + \frac{\partial\xi^x}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial\xi^x}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial\xi^x}{\partial x}\right) + O(\xi^2) \\ &= 1 + \frac{\partial\xi^x}{\partial x} + \frac{\partial\xi^y}{\partial y} + \frac{\partial\xi^z}{\partial z} + O(\xi^2) = 1 + \nabla\cdot\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \tag{6.65}$$

レポートでは行列式計算の詳細を示せ。

2. 省略。

演習問題 6.3： (重要) 角運動量保存則

τ_{ij} が対称テンソルであれば、角運動量が保存することを示せ。

演習問題 6.4： 単位質量あたりの熱力学第 1 法則

質量 m の単一の粒子からなる流体を考える。単位質量あたりの熱力学量についての熱力学第 1 法則が

$$du = Tds - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

となることを示せ。ここで u, s は単位質量あたりのエネルギーとエントロピーである。

略解： 体積 V の流体の熱力学第 1 法則は

$$\delta Q = dU + PdV \tag{6.66}$$

全粒子数を N (= 一定)、個数密度を n とすると、$N = nV$。同様に全質量を $M = mN$ (= 一定)、質量密度を $\rho = mn$ とすると、$M = \rho V$。これより $V = M/\rho$。単位質量あたりのエネルギーを u とすると $U = uM$。これらを (6.66) 式に代入すると、

$$\delta Q = Mdu + MP\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{6.67}$$

両辺 M で割って

$$\delta\left(\frac{Q}{M}\right) = du + P\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{6.68}$$

ここで、左辺は単位質量あたりの熱量変化。エントロピー S は示量変数、(そして温度 T が示強変数) であるから、単位質量当たりのエントロピーが、

$$\delta q \equiv \delta\left(\frac{Q}{M}\right) = Tds \tag{6.69}$$

によって導入できる (レポートでは、この示量変数に関する議論について考察を加えてみよ)。よって、単位質量あたりの熱力学量についての熱力学第 1 法則は

$$du = Tds - P\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

となる。

演習問題 6.5： (重要) 微小量を含む計算

1. (6.12) 式のように近似できる理由について考察せよ。
2. (6.47) 式

$$\delta W = \tau^{ij}\partial_j \delta s_i + \delta s_i \Big[\partial_j \tau^{ij} + \rho K^i\Big]$$

において、微小変形しているので実際には、つり合い $\partial_j \tau^{ij} + \rho K^i = 0$ からずれているが、δs_i が微小なので、微小量の 1 次のオーダーでは $\delta W = \tau^{ij}\partial_j \delta s_i$ となることを示せ。

略解：

1. ここでの速度は流体素片の伸び縮みの速度である。基準点を直方体の適当な 1 つの頂点に選び (この点を $(0,0,0)$ とする)、流体素片の伸び縮みをそこから図るものとする (つまり、$v_i(0,0,0) = 0$ である) と、x 方向への伸び縮みに対して、x が微小量であることから

$$\frac{v_x}{x} \approx \frac{v_x(x,0,0) - v_x(0,0,0)}{x} \approx \frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{6.70}$$

y, z 方向への伸び縮みについても同様である。

2. 釣り合い $\partial_j \tau^{ij} + \rho K^i = 0$ からのずれは大きくても $O(\delta s^i)$ のオーダー。これを考慮すると、(6.47) 式は、

$$\delta W = \tau^{ij} \partial_j \delta s_i + \delta s_i \delta s^i \tag{6.71}$$

となるが、右辺第 2 項は δs^i の 2 次のオーダーなので寄与しない。

演習問題 6.6： (重要) ベクトル形式に格上げできるかどうか

1. ベクトル解析の公式
$$\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{A} \tag{6.72}$$
を示せ。
2. 極座標では $(\boldsymbol{v} \cdot \nabla) v^i \neq [(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}]^i$ であることを示せ。すなわち、上記公式は極座標系では成り立たない。ベクトル解析の公式は便利なものであるが、デカルト座標以外では、その適用には注意が必要である。

略解：

1. レビ・チビタ記号を用いて成分計算すれば
$$\begin{aligned} [\boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})]_i &= \epsilon_{ijk} A^j \epsilon^{klm} \partial_l A_m = (\delta_i^l \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^l) A^j \partial_l A_m \\ &= A^j \partial_i A_j - A^j \partial_j A_i = \frac{1}{2} \partial_i (A^j A_j) - A^j \partial_j A_i \\ &= \frac{1}{2} \nabla_i (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot \nabla A_i \end{aligned} \tag{6.73}$$
2. 極座標系で具体的に計算しても示せるが、次のようにするとより簡単である。右辺を基底を含めて詳細に書くと、
$$[(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}]^i = [(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)(v^k \boldsymbol{e}_k)] \cdot \boldsymbol{e}_i \tag{6.74}$$
である。これを用いると具体的に成分計算しなくても示せる。すなわち、右辺は
$$\begin{aligned} [(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)(v^k \boldsymbol{e}_k)] \cdot \boldsymbol{e}_i &= (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) v^k (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_i) + v^k [(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{e}_k] \cdot \boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) v^k \delta_i^k + v^k [(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{e}_k] \cdot \boldsymbol{e}_i \\ &= (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) v^i + v^k [(\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{e}_k] \cdot \boldsymbol{e}_i \end{aligned} \tag{6.75}$$
したがって、右辺第 2 項が消えない場合には成り立たない。デカルト座標では $\nabla \boldsymbol{e}_k = 0$ であるが、極座標ではそのようになっていない。(演習問題 1.2, 1.3 も参照せよ)

演習問題 6.7： (加点問題) ラグランジュ形式における運動方程式

6.2.2 節を参考に、(6.29) 式が成り立つことを示し、ラグランジュ形式における運動方程式 (6.22) が運動量保存則 (6.30) と矛盾しないことを示せ。

演習問題 6.8： (加点問題) エネルギー保存則

流体の場合、一般に力学的エネルギーだけでは保存せず、内部エネルギーを考慮してはじめてエネルギー保存則が得られることを、6.4 節を参考にして示せ。

第 7 章

完全流体と粘性流体

流体とは、**運動をしていない場合には**、体積の変化を伴わない変形を自由に行うものとして定義された。これより、静止流体では、応力ベクトルは、その大きさが面要素のとりかたによらず、また、面要素にたいして接線成分を持たず、法線成分しか持たないことが結論づけられた。これより、応力テンソルは

$$\tau_{ij} = -P\,\delta_{ij} \tag{7.1}$$

となる。

流体が運動している場合にも応力テンソルが (7.1) のかたちで表されるとき、**完全流体**あるいは理想流体という。しかし、一般の流体は、変形が有限の速度で作用する場合には抵抗を示す。たとえば粘性のために、応力に接線成分、すなわち引きずりの効果があらわれる。このような流体を粘性流体と呼ぶ。現実の流体は一般に有限の粘性を持ち、厳密には完全流体ではないが、恒星内部や銀河空間ガスなど、完全流体の近似がよい場合も多く存在する。

本章では、ニュートンの粘性の法則に基づいて応力テンソルと歪み速度テンソルの関係を導出し、粘性流体の基礎方程式であるナヴィエ・ストークス (Navier-Stokes) 方程式を導く。ナヴィエ・ストークス方程式の一般的取扱いは困難であるので、流体力学の基礎的事項を説明する段では、完全流体を仮定することにする。

7.1　粘性応力

7.1.1　粘性の起源

応力ベクトルとしての粘性力の起源について考えよう。ここで、最も重要なことは、ニュートンの運動方程式が示す通り、運動量の時間変化は力積あるいは力である。すなわち、**運動量に変化や不均衡があれば何らかの力が働いている**ということである。

粘性の起源を考察するためには、流体素片内の分子の運動に着目する必要がある。いま x 軸方向に平行な流れがあって、z 軸方向にのみ流速が変化していて、z 座標の大きい場所の流体ほど、速度 $\boldsymbol{v}$ の x 成分 $v_1 = v_x$ が大きいとする。いま、この流れの中で $z = z_0$ の仮想的な境界面を考え、その周辺での分子の運動に着目する。

流体素片のスケールで見れば、$z = z_0$ を横切る流体素片はないので、流れは一様である。しかし、分子のスケールで見れば、$z = z_0$ 面を介して、ひっきりなしに分子が出入りしている。このとき、下側では、流体素片でのスケールでの x 方向速度が上側より小さい $(v_x(z_0+\epsilon) > v_x(z_0-\epsilon)))$ ので、分子スケールで見れば、下側からから上側に移る分子と、上側から下側にやってくる粒子では、後者の方が大きな x 方向の運動

量を持っている ($p_x(z_0+\epsilon) > p_x(z_0-\epsilon)$)。

今、ある分子が上側から下側にやってきたとする。下側の分子から見ると運動量が運ばれてきたことになる。この分子は、下側にやってくるとすぐに、下側の分子と激しく衝突して、下側の分子の全体的な流れ (流体素片の速度) に馴染んでしまうので、再び上側に戻るときには、運び込んできた運動量を下側に渡して戻っていくことになる。このようにして、**分子スケールで見れば絶えず x 方向の運動量が下側に運ばれている**ことになる。**運動量に変化や不均衡があれば何らかの力が働いている**はずなので、これが粘性力の起源である[*1]。

分子間力が無視できない場合には、上側の分子と下側の分子が分子間力というバネでつながれてるようなものなので、流れの速い上側は、流れの遅い下側の分子に足を引っ張られ、引きずりの効果が生まれる。

気体 (流体) の分子運動論では、粘性力を上記のメカニズムに基づいて微視的に求めるが、それは極めて複雑である。以下では、上記のメカニズムのエッセンスだけを抽出して、流体素片のスケールで働く粘性力について考えることにする。

7.1.2　ニュートンの粘性応力テンソル (Newton's viscous stress tensor)

x 方向の流れ $v_x(z)$ があるとき、z 軸に垂直な面要素 dS を通して、上の流体が下の流体に及ぼす x 方向の力を考える。これは、単位法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{e}}_z$ である面要素に働く x 方向の力だから、$F_i = \tau_{ij}n^j$ より $F_x = \tau_{xz}$、すなわち応力テンソルの $xz\,(1,3)$ 成分である。

ニュートンは、速度差がある場合に粘性による引きずり力が生じる理由を 7.1.1 節のように考察し、下側に運ばれる運動量 $mv_x(z+\epsilon)$ と下側から運ばれてくる運動量 $mv_x(z-\epsilon)$ の差 $m[v_x(z+\epsilon) - v_x(z-\epsilon)]$ が正味の運動量変化であるから、この引きずり力が速度の勾配に比例すると考えた。すなわち、

$$F_x = \tau_{xz} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} = \eta \partial_z v_x \equiv \tau^N_{xz} \tag{7.2}$$

と仮定した[*2]。これを**ニュートンの粘性の法則**という。ここで η は比例係数である[*3]。

この比例係数 η が流体の流れの方向にはよらないと仮定すると (これを**等方性粘性**と呼ぶ)、

$$\tau^N_{xy} = \eta \partial_y v_x, \qquad \tau^N_{yz} = \eta \partial_z v_y \tag{7.3}$$

が成り立つので、応力テンソルは

$$\tau^N_{ij} = \eta \frac{\partial v_i}{\partial x^j} = \eta \partial_j v_i \tag{7.4}$$

と表される。力とモーメントのつり合い、および角運動量保存則からの要請として、応力テンソルは対称テンソルであるべきことから[*4]、これを対称化して、

$$\tau^N_{ij} = \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right] = \eta\big(\partial_i v_j + \partial_j v_i\big) = 2\eta e_{ij} \tag{7.5}$$

としよう。ここで歪み速度テンソル (5.10) を用いた。

[*1] 標語的に言えば、分子の微視的な乱雑な運動が粘性力の起源と考えることができる。
[*2] 添字 N は Newton の N をあらわす。
[*3] 流体実験あるいは分子運動論の解析から決められる。
[*4] 実は応力テンソルが対称でない場合も存在する。例えば磁気モーメントを持つ分子が流体素片に含まれるような場合である。このような流体を極性流体と呼ぶ。

7.1.3 流体の圧縮に伴う粘性

次に、体積の変化を伴う変位にともなう運動の場合に働く粘性について考える。体積が小さくなる場合には密度が増加するから、流体素片中の分子の衝突回数が増え、運動量のやりとりが増加する。単位時間あたりの運動量の変化が力であったから、この場合にも流体に応力が加わることになる。この場合、運動量のやりとりの増加は空間の各成分について等しいと考えられる。すなわち、圧縮の結果、流体がある特定の方向に力を受けて動き出すことはないとする (等方性)。すると、この応力は、流体の密度変化率、すなわち体積変化率に比例していると予想される。

体積の変化率は $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \partial_i v^i$ で与えられた (6.1.2 節および出席課題参照)。$\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ はスカラー量であるから、座標変換によって不変である。すなわち、観測者に依存して、圧縮に伴う粘性応力の等方性が壊れることはない。そこで、圧縮に伴う粘性応力テンソルを、比例係数 ζ を用いて、

$$\tau_{ij}^V = \zeta(\nabla \cdot \boldsymbol{v})\delta_{ij} = \zeta(\partial_k \cdot v^k)\delta_{ij} = \zeta e^k_{\ k}\delta_{ij} \tag{7.6}$$

とおくことにしよう[*5]。

ここで、$e^k_{\ k}$ 歪み速度テンソルの kk 成分ではなく、対角和 (トレース)

$$e^k_{\ k} = e^1_{\ 1} + e^2_{\ 2} + e^3_{\ 3} = \nabla_x v^x + \nabla_y v^y + \nabla_z v^z = \nabla \cdot \boldsymbol{v} \tag{7.7}$$

である。

7.1.4 ずり粘性テンソル (Shear viscous tensor)

実は、速度差に基づくニュートンの粘性応力テンソル (7.5) 式にも、体積変化ともなう粘性が含まれている。実際、(7.5) 式の右辺のトレースをとると $2\eta e^k_{\ k}$ となるが、これは体積変化に伴う粘性テンソル τ_{ij}^V のトレースと同型である。このままでは体積変化に伴う応力を 2 重にカウントすることになってしまうので、ニュートンの粘性応力テンソルからこの部分を差し引いておこう。

そこで、ニュートンの粘性応力テンソル (7.5) 式から体積変化による部分を差し引いた、純粋な**ずり粘性テンソル**を

$$\tau_{ij}^S = 2\eta\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e^k_{\ k}\delta_{ij}\right) \tag{7.8}$$

で定義する[*6]。すると、τ_{ij}^S には体積変化の効果による応力成分が含まれないことを示すことができる (出席課題)。

7.1.5 ニュートン・ストークス (Newton-Stokes) の応力テンソル

流体が流れていない場合 $\boldsymbol{v} = 0$ の場合には静止流体の応力テンソルも存在し、

$$\tau_{ij}^P = -P\,\delta_{ij} \tag{7.9}$$

[*5] 添字 V は Volume の V である。
[*6] 添字 S は Shear の S である。

とあらわされる[*7]ことを考慮すると、粘性流体の応力テンソルは、

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^P + \tau_{ij}^V + \tau_{ij}^S = -P\delta_{ij} + \zeta e^k_k \delta_{ij} + 2\eta\left(e_{ij} - \frac{1}{3}e^k_k\delta_{ij}\right)$$
$$= \left[-P + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right)e^k_k\right]\delta_{ij} + 2\eta e_{ij} \tag{7.10}$$

で与えられる。ζ **を体積粘性率、**η **をずり粘性率と呼ぶ**。これがニュートンの粘性の法則を拡張した等方性粘性流体の応力テンソルであり、**ニュートン・ストークス (Newton-Stokes) の応力テンソル**と呼ばれる。

通常、体積粘性率はずり粘性率に比べて小さいので、これを無視して $\zeta = 0$ と近似することが多い[*8]。**以下では** $\zeta = 0$ **を仮定して体積粘性率を考えないことにする**。すなわち、

$$\tau_{ij} = \left[-P - \frac{2}{3}\eta\, e^k_k\right]\delta_{ij} + 2\eta\, e_{ij} \tag{7.11}$$

とする。

出席課題 S.7.1：　密度の変化率と体積の変化率の関係性に着目し、体積の時間変化率が $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ であることを連続の式を用いて説明せよ。

略解　連続の式をラグランジュ微分を用いてあらわすと、

$$\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{7.12}$$

ここで、流体素片の質量を M (= 一定)、体積を V とすると、$\rho = M/V$ であるから、変数を密度 ρ から体積 V に置き換えることができる：

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{7.13}$$

体積のラグランジュ微分を流体の流れに沿っての体積変化 $\Delta_L V = DV/Dt$ と見做せば、左辺 $\Delta_L V/V$ は体積変化率そのものであるが、右辺より $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ に等しい。

出席課題 S.7.2：　体積の時間変化率が $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$ であることから、(7.8) 式には体積変化の効果が含まれないことを説明せよ。

略解　歪み速度テンソルのトレースは $e^k_k = \nabla\cdot\boldsymbol{v}$ より体積変化の効果である。これに対して (7.8) 式のトレースをとると、

$$e^i_i - \frac{1}{3}e^k_k\delta^i_i = e^i_i - \frac{1}{3}e^k_k\cdot 3 = e^k_k - \frac{1}{3}e^k_k\cdot 3 = 0 \tag{7.14}$$

となるから、(7.8) 式は、歪み速度テンソルのトレースが 0 になるようにしたもの、すなわち、歪速度テンソルから体積変化による寄与を抜き去ったものであり、体積変化の効果が含まれないことが分かる。

7.2 粘性流体の運動

7.2.1 ナヴィエ・ストークス (Navier-Stokes) 方程式

ニュートン・ストークスの応力テンソルの場合の基礎方程式をまとめると、

$$\partial_t\rho + \partial_i(\rho v^i) = 0 \tag{7.15}$$

$$\partial_t(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_i v^j) = -\partial_i P + \partial_j\left[\eta\left(\partial_i v^j + \partial^j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_k v^k\right)\right] \tag{7.16}$$

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho u\right) + \partial_j\left[\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho u + P\right)v^j\right] = \partial_j\left[\eta\left(\partial_i v^j + \partial^j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_k v^k\right)v^i\right] \tag{7.17}$$

[*7] 添字 P は Pressure の P である。

[*8] 実際、相互作用のない単原子分子にたいしては $\zeta = 0$ であることを導くことができる。

となる。ここで外力および、内部熱源はないとした：$K^i = 0, \dot{Q} = 0$。これらをまとめて**ナビエ・ストークス (Navier-Stokes) 方程式**と呼ぶ。**第 2 式の運動量保存則だけを特にナビエ・ストークス (Navier-Stokes) 方程式と呼ぶことも多い**。

ずり粘性率 η は流体分子の乱雑な熱運動に起因するものであったから、一般に温度と密度に依存する。この場合には η を微分の外に出すことはできない。一方、流れの場の温度変化や密度変化が十分に小さければ、η は近似的に一定であるとみなすことができる。この場合、運動量保存則の右辺は、

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= -\partial_i P + \left[\partial_i \partial_j v^j + \partial_j \partial^j v_i - \frac{2}{3}\partial_i \partial_k v^k\right] = -\partial_i P + \eta \left[\partial_j \partial^j v_i + \frac{1}{3}\partial_i \partial_k v^k\right] \\
&= -\nabla P + \eta \nabla^2 \boldsymbol{v} + \frac{\eta}{3}\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{v})
\end{aligned} \tag{7.18}
$$

と書き換えることができる。議論を簡単なものとするため、**以下では、η は近似的に一定であるとみなすことにする**。

7.2.2 非圧縮性流体のナヴィエ・ストークス方程式

ここで、流体の圧縮性が無視できるとすると、密度のラグランジュ微分はゼロである。この場合、連続の式をラグランジュ微分で書き換えた式

$$
\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{7.19}
$$

において $D\rho/Dt = 0$ であるから、非圧縮性流体については連続の式から

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{7.20}
$$

であることが結論づけられる。これは、$\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ が流体素片の体積変化率であったから、非圧縮性の縮まない流体の場合には $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ であることは当然の結果とも言える。

これを運動量保存則に代入すると、

$$
\partial_t(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_i v^j) = -\partial_i P + \eta \partial_j \partial^j v_i \tag{7.21}
$$

が得られる。さらに連続の式を用いて書き換えると、

$$
\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{7.22}
$$

となる。ここで、

$$
\nu \equiv \frac{\eta}{\rho} \tag{7.23}
$$

によって**運動粘性率** ν を定義すると、非圧縮性流体に対するナヴィエ・ストークス方程式

$$
\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu \nabla^2 \boldsymbol{v} \tag{7.24}
$$

が得られる。

これより、非圧縮性の粘性流体の「運動 (速度変化)」を支配しているのは、ずり粘性率 η ではなく運動粘性率 ν であることがわかる。例えば、η の値は 20 ℃、1 気圧では空気のほうが水に比べてずっと小さい

$$
\eta_{\text{空気}} = 1.809 \times 10^{-4}\,\mathrm{g\,cm^{-1}\,s^{-1}}, \qquad \eta_{\text{水}} = 1.002 \times 10^{-2}\,\mathrm{g\,cm^{-1}\,s^{-1}} \tag{7.25}
$$

が、運動粘性率は空気のほうが大きい

$$
\nu_{\text{空気}} = 1.501 \times 10^{-1}\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}}, \qquad \nu_{\text{水}} = 1.004 \times 10^{-2}\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}} \tag{7.26}
$$

ので、空気のほうが水よりも粘り気があるということになる。

出席課題 S.7.3： **(粘性率の次元)** ずり粘性率 η と運動粘性率 ν の次元が、それぞれ

$$[\eta] = [M][L]^{-1}[T]^{-1}, \qquad [\nu] = [L]^2[T]^{-1} \tag{7.27}$$

であることを示せ。ここで、$[M]$, $[L]$, $[T]$ はそれぞれ質量、長さ、時間の次元をあらわす。

ヒント　P と ηe_{ij}(あるいは $\partial_t(\rho v_i)$ と $\partial_j \eta e_{ij}$) の次元は同じでなければならない (なぜか？)。η の次元がわかれば、ν の次元は (7.23) 式よりわかる。

7.2.3　粘性加熱

内部熱源がない場合の内部エネルギー方程式

$$\partial_t(\rho u) + \partial_i\big(\rho u v^i\big) = \tau^{ij}\partial_i v_j \tag{7.28}$$

の右辺は、ニュートン・ストークスの粘性応力の場合、

$$\tau_{ij}\partial^i v^j = -P\partial_k v^k \eta \left(\partial_i v^j + \partial_j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_k v^k\right)\partial^i v^j = -P\partial_k v^k + 2\eta\left(e_{ij}e^{ij} - \frac{1}{3}(e^k_{\ k})^2\right) \tag{7.29}$$

となる。右辺第 2 項は、粘性による力学的エネルギーの内部エネルギーへの非可逆な転換を表しており、粘性加熱項と呼ばれる。粘性加熱項は、

$$\Phi \equiv 2\eta\left(e_{ij}e^{ij} - \frac{1}{3}(e^k_{\ k})^2\right) \tag{7.30}$$

と書いて、散逸関数とも呼ばれる。

7.2.4　渦度方程式

速度場 $\boldsymbol{v}$ の回転 $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla\times\boldsymbol{v}$ を渦度という。ナビエ・ストークス方程式 (7.16) は、ポテンシャルで記述できる外力 $K_i = -\partial_i U$ がある場合には

$$\partial_t v_i + v^k\partial_k v_i = -\partial_i U - \frac{1}{\rho}\partial_i P + \nu\partial_k\partial^k v_i + \frac{\nu}{3}\partial_i\partial_k v^k \tag{7.31}$$

となる。ベクトル形式で書けば、

$$\partial_t\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla U - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{\nu}{3}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}) \tag{7.32}$$

となる。

ここで、ベクトル解析の公式

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v}) \tag{7.33}$$

を用いれば、

$$\partial_t\boldsymbol{v} + \nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + U - \frac{\nu}{3}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right) = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu\nabla^2\boldsymbol{v} \tag{7.34}$$

となる。ここで両辺の回転をとり、任意のスカラー場 ϕ に対して $\nabla\times\nabla\phi = 0$ であること、および

$$\nabla\times(\phi\boldsymbol{v}) = \nabla\phi\times\boldsymbol{v} + \phi\nabla\times\boldsymbol{v} \tag{7.35}$$

を用いると、**渦度方程式**

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla P + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \tag{7.36}$$

が得られる (演習問題)。これより、初期に渦度がない場合でも、**密度の勾配と圧力の勾配の方向が異なる場合には渦度が生成される**ことがわかる。

さらに、ベクトル解析の公式

$$\nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) \tag{7.37}$$

と $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) = 0$ を用いると、渦度方程式はラグランジュ微分を用いて

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - (\nabla \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla P + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \tag{7.38}$$

となる。さらに、両辺 ρ で割り、連続の方程式を用いることで、方程式

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\left[(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \nabla P + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}\right] \tag{7.39}$$

が得られる (演習問題)。

出席課題 S.7.4 : レビ・チビタ記号の公式を用いて $\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})$ を計算することで、(7.33) 式を示せ。

出席課題 S.7.5 : 任意のスカラー関数 ϕ に対して、恒等的に $\nabla \times \nabla \phi = 0$ となることを示せ。

出席課題 S.7.6 : 任意のベクトル場 ϕ に対して、恒等的に $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) = 0$ となることを示せ。

7.3 完全流体の運動

粘性も内部熱源もない流体を完全流体と呼ぶ。本節ではこの完全流体について考察する。

7.3.1 オイラー (Euler) 方程式

この場合の運動量保存則 (6.20) と (6.22) は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^i v^j + P\delta^{ij}) = \rho K^i \tag{7.40}$$

および

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\partial_i P + \rho K_i \tag{7.41}$$

となる。これらの方程式を**オイラー (Euler) 方程式**と呼ぶ。(7.40) 式は、(7.34) 式を導いたのと同様の計算で、

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \nabla\left(\frac{1}{2}v^2 + U\right) = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\nabla P}{\rho} \tag{7.42}$$

と変形できる。

ここで、外力はポテンシャル力 $K_i = -\partial_i U$ であるとして、さらに、圧力が密度だけの関数である $P = P(\rho)$ であることを仮定する。この場合、

$$\frac{dH}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{dP}{d\rho} \tag{7.43}$$

となる $H(\rho)$ が存在する。実際、

$$H(\rho) = \int \frac{dP}{\rho} \tag{7.44}$$

と与えれば (7.43) 式を満たすが、$P = P(\rho)$ を与えればこの積分は実行可能である。さらに、$P(\rho(\boldsymbol{r}))$ に対し、

$$\frac{1}{\rho}\nabla P = \frac{1}{\rho}\frac{dP}{d\rho}\nabla\rho = \frac{dH}{d\rho}\nabla\rho = \nabla H \tag{7.45}$$

であることに注意すると、オイラー方程式 (7.41), (7.42) は、それぞれ

$$\partial_t v_i + \partial_i\left(\frac{1}{2}v^2 + H + U\right) = (\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})_i \tag{7.46}$$

および

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\partial_i(H+U) \tag{7.47}$$

と表すことができる。

出席課題 S.7.7 :　(7.40) 式からスタートして、 (7.46), (7.47) 式を示せ。

7.3.2　渦の諸定理

ラグランジュの渦定理

圧力が密度だけの関数の場合、密度と圧力の勾配は平行になるから、$\nabla\rho\times\nabla P = 0$ である。渦度方程式は、(7.39) 式より

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} \tag{7.48}$$

となる。これより最初に渦度が存在すれば、渦度が消滅することはなく、逆に、最初に渦度がなかったとすると、渦度が生成されることもないことがわかる。これを**ラグランジュの渦定理**という。

ケルビンの循環定理

流れの中に任意の閉曲線 C をとり、曲線 C に沿っての $\boldsymbol{v}$ の線積分

$$\Gamma(C) = \oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x} \tag{7.49}$$

を C に沿っての**循環 (circulation)** と呼ぶ。ストークスの定理を用いると、

$$\Gamma(C) = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_S \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{7.50}$$

となるので、循環は C を境界とする曲面 S における渦度の $\boldsymbol{n}$ 成分の積分に等しい。

ここで、循環 $\Gamma(C)$ の流体の流れに沿っての時間進化

$$\frac{D}{Dt}\Gamma(C) = \oint_C \frac{D}{Dt}(\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{x}) = \oint_C \frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}\cdot d\boldsymbol{x} + \oint_C \boldsymbol{v}\cdot\frac{D}{Dt}d\boldsymbol{x} \tag{7.51}$$

を考える。ここで $\frac{D}{Dt}d\boldsymbol{x} = d\boldsymbol{v}$ およびオイラー方程式 (7.47) を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\Gamma(C) &= -\oint_C \nabla(H+U)\cdot d\boldsymbol{x} + \oint_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v} = \oint_C \nabla\left[\frac{1}{2}v^2 - H - U\right]\cdot d\boldsymbol{x} \\ &= \oint_C d\left[\frac{1}{2}v^2 - H - U\right] = \oint_C d\Psi = 0\end{aligned} \tag{7.52}$$

となる。ここで スカラー関数 $\Psi \equiv v^2/2 - H - U$ の閉曲線に沿っての積分が 0 であることを用いた。これより、流体とともに動く閉曲線に沿っての循環は時間とともに変化しないことが結論づけられる。これを**ケルビン (Kelvin) の循環定理**という。

7.3.3 渦なしの流れとベルヌーイの定理

渦なしの流れ $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v} = 0$ の場合、ベクトル解析の知識より、$\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ となるスカラー場 ϕ が存在する。このような ϕ **を速度ポテンシャルと呼ぶ**。

これより、オイラー方程式 (7.46) は、

$$\partial_i \left(\partial_t \phi + \frac{1}{2} v^2 + H + U \right) = 0 \tag{7.53}$$

となる。これを積分すると、時間だけの関数 $G(t)$ を用いて

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2} v^2 + H + U = g(t) \tag{7.54}$$

となる。ここで、$dG(t)/dt = g(t)$ となる関数 $G(t)$ を用いて、

$$\phi' = \phi - G \tag{7.55}$$

のように速度ポテンシャルを再定義すると、時間依存性は速度ポテンシャル ϕ に吸収できるので、結局、渦なしの流れに対して、

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2} v^2 + H + U = \text{一定} \tag{7.56}$$

が成り立つ。これを**ベルヌーイの定理**と呼ぶ。

流れが時間的に変化しない定常流の場合には、$\partial_t \phi = 0$ であるから、

$$\frac{1}{2} v^2 + H + U = \text{一定} \tag{7.57}$$

となる。

出席課題 S.7.8 :　$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v} = 0$ の場合、$\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ となるスカラー場 ϕ が存在することを説明せよ。

7.3.4 圧縮性流体における音波

静止流体中に小さな擾乱が加わった場合に、その擾乱の伝播について考えよう。外力は無視できるとして、簡単のために 1 次元問題を考える。一様な静止流体 $(\rho = \rho_0, v = 0)$ に微小な摂動 $\rho'(x,t), v'(x,t)$ が加わって

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \rho'(x,t), \qquad v(x,t) = v'(x,t) \tag{7.58}$$

となったとする。

連続の式

$$\partial_t \rho + \partial_i (\rho v^i) = 0 \tag{7.59}$$

とオイラー方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}(\rho v^i v^j + P\delta^{ij}) = 0 \tag{7.60}$$

について、微小量 ρ', v' の 1 次まで考慮した方程式は、

$$\partial_t \rho' + \rho_0 \partial_x v = 0, \qquad \rho_0 \partial_t v = -\partial_x P = -\frac{\partial P}{\partial \rho}\partial_x \rho' \equiv -c_s^2 \partial_x \rho' \tag{7.61}$$

となる。ここで圧力は密度だけの関数であると仮定した。

第 1 式を t で、第 2 式を x で偏微分して、差を取ると、

$$\partial_t^2 \rho' - c_s^2 \partial_x^2 \rho' = 0 \tag{7.62}$$

となる。これは波動方程式であり、密度の擾乱 ρ' が速度 c_s で伝播していくことを示している。すなわち、

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} \tag{7.63}$$

は音速である。

以上の導出ではエネルギー方程式を用いなかったが、より一般には、圧力を密度と単位質量あたりのエントロピー s の関数 $P = P(\rho, s)$ として、s を一定とした場合の偏微分

$$c_s^2 = \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_s \tag{7.64}$$

を用いて音速が定義される[*9]。すなわち、エネルギー方程式はエントロピー s が一定という条件を満たすものとして組み込まれていることになる。

7.A　7 章の演習問題

演習問題 7.1： (重要) 渦度方程式

1. (7.31) 式からはじめて、渦度方程式

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla P + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$$

   を導け。

2. 上で導いた渦度方程式は、ラグランジュ微分を用いて

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - (\nabla\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla P + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$$

   と表わせることを示せ。

3. さらに連続の式を用いて、

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\left[(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla P + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}\right]$$

   を導け。

演習問題 7.2： (重要) 渦の諸定理とベルヌーイの定理

ラグランジュの渦定理、ケルビンの循環定理およびベルヌーイの定理を示せ。

[*9] すなわち、音速は、周囲との熱的散逸過程が無視できる (断熱変化) ような場合について定義される。散逸の時間スケールが短い場合などその効果が無視できない場合には、音波と散逸過程の間でエネルギーのやり取りが生じるため、その取り扱いには注意を要する。

演習問題 7.3： 水時計

ある容器に水が入っている。容器の底に半径 a の小さい穴を開け、そこから水を流し，水面の降下によって時間をはかる水時計を考える。穴は十分小さく、水面は $v=0$ としてよい。流れは定常であり、水の圧縮性および粘性は無視できるものとしよう。また、水面および穴における圧力は大気圧 P_0 と等しいとする。

1. ベルヌーイの定理より、水面の高さが穴から測って z であるときに、小穴から流体の流れだす速度が $v=\sqrt{2gz}$ であることを示せ (トリチェリ (Torricellli) の定理)。ここで g は重力加速度である。
2. 半径を r として、容器の形状を $z=h(r/R)^\beta$ を z 軸の周りに回転させたものとする。水面の高さが z のとき、水面の降下速度を求めよ。
3. 水面の降下速度を一定にする β の値を求めよ。

略解：

1. 流れが定常な場合のベルヌーイの定理 (7.57) より、$\dfrac{1}{2}v^2+H+U=$ 一定。圧縮性が無視できるので、(7.44) 式よりエンタルピーは $H=P/\rho$。水面と小穴で (7.57) 式を評価すると、$P_0/\rho+mgz=mv^2/2+P_0/\rho$。よって $v=\sqrt{2gz}$。
2. 時間 Δt の間に水面が Δz だけ下がったとすると、その間に流れだした水量は、$\pi r^2\Delta z$ の円柱内に含まれる量である。これと同じだけの水量が小穴からも流れ出ていなければならない。小穴での流速は $v=\sqrt{2gz}$。なので、Δt の間には、$\pi a^2\sqrt{2gz}\Delta t$ の量が流れ出る。$\pi r^2\Delta z=\pi a^2\sqrt{2gz}\Delta t$ および $z=h(r/R)^\beta$ から r を消去すると、
$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=\sqrt{2gh}\frac{a^2}{R^2}\left(\frac{z}{h}\right)^{1/2-2/\beta} \tag{7.65}$$
$\Delta t\to 0$ の極限でこれは水面の降下速度になる。
3. 水面の降下速度が高さに依らず一定であるためには、$\beta=4$。

演習問題 7.4： お風呂の栓を抜いたときの渦の形

ケルビンの循環定理とベルヌーイの定理より、お風呂の栓を抜いたときにできる渦の形を求めよう。ただし、流れは定常であり、水の降下速度は回転速度に比べて遅いとする。また、渦の形は回転対称であるとしよう。

1. 渦の半径が $r(z)$ であるときの流速 v を、循環 Γ と r を用いて表せ。
2. ベルヌーイの定理より、v は栓からの高さ z の関数としても表せる。1. の結果と合わせ、渦の形 $z(r)$ を求めよ。

略解：

1. 閉曲線 C として半径 r の円をとる。仮定より流速 v には回転だけが寄与しているとしてよい。このとき、C に沿って v は一定であるから、(7.49) 式より $\Gamma=2\pi rv$。ケルビンの循環定理より循環 Γ は保存量である。
2. ベルヌーイの定理より導かれるトリチェリの定理より、$v=\sqrt{2gz}$。この v に前問 1. より求まる $v=\Gamma/2\pi r$ を代入すると、
$$z(r)=\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g}\frac{1}{r^2} \tag{7.66}$$

演習問題 7.5： (重要) 理想気体の音速

理想気体の状態方程式は

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{\mu} \tag{7.67}$$

である。ここで R は気体定数、μ は気体 1 モルの質量である。

1. 状態方程式の両辺の全微分をとり、
$$\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} \tag{7.68}$$
となることを示せ。
2. 単原子分子からなる理想気体の単位質量あたりの内部エネルギーは
$$u = \frac{3}{2}\frac{RT}{\mu} \tag{7.69}$$
で与えられる。断熱変化の場合の熱力学第 1 法則から、
$$du = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu}dT = \frac{P}{\rho^2}d\rho \tag{7.70}$$
を導け。
3. 以上より
$$\frac{dP}{P} = \frac{5}{3}\frac{d\rho}{\rho} \tag{7.71}$$
を導き、音速を求めよ。

略解：

1. 単純計算であるから省略。
2. 単位質量当たりの熱力学第 1 法則 (6.45)
$$du = Tds - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = \delta Q - Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{7.72}$$
において、断熱変化 $\delta Q = 0$ の場合には、
$$du = -Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{P}{\rho^2}d\rho \tag{7.73}$$
一方、単位質量あたりの内部エネルギーは $u = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu}T$ であるから、
$$du = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu}dT \tag{7.74}$$
3. (7.68) 式に (7.70) 式を代入すれば
$$\frac{dP}{P} = \frac{5}{3}\frac{d\rho}{\rho} \tag{7.75}$$
が得られる。これより
$$dP = \frac{5}{3}\frac{P}{\rho}d\rho \tag{7.76}$$
これと $P = P(\rho, s)$ の全微分
$$dP = \left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_s d\rho + \left.\frac{\partial P}{\partial s}\right|_\rho ds \tag{7.77}$$

において $ds = 0$(断熱) としたものを比べると、

$$\left.\frac{\partial P}{\partial \rho}\right|_s = \frac{5}{3}\frac{P}{\rho} \tag{7.78}$$

よって理想気体の音速は、

$$c_s = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{P}{\rho}} \tag{7.79}$$

演習問題 7.6：Levi-Civita 記号の応用

Levi-Civita 記号を用いて、ベクトル解析の公式

$$\nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} - \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} \tag{7.80}$$

を示せ。

略解：

$$\begin{aligned}
\big[\nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega})\big]^i &= \epsilon^{ijk}\partial_j(\epsilon_{klm}v^l\omega^m) = (\delta^i_l\delta^k_m - \delta^k_l\delta^i_m)\partial_j(v^l\omega^m) \\
&= (\delta^i_l\delta^k_m - \delta^k_l\delta^i_m)(\omega^m\partial_j v^l + v^l\partial_j\omega^m) \\
&= \omega^j\partial_j v^i - \omega^i\partial_j v^j + v^i\partial_j\omega^j - v^j\partial_j\omega^i \\
&= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)v^i - \omega^i(\nabla \cdot \boldsymbol{v}) + v^i(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\omega^i
\end{aligned} \tag{7.81}$$

第 8 章

テンソル解析への第一歩

5 章で取り扱った応力テンソルやリーマンの曲率テンソルのように、物理学では 2 つ以上の方向属性を持つ概念や物理量が登場する。このような物理量を取り扱うための数学的道具がテンソルである。

本講義ノートで採用した添字による記述法では、このような 2 つ以上の方向属性をもつ物理量 (テンソル) は、その成分 (= ある基底ベクトルを導入した場合の展開係数、あるいはある座標系 (観測者) でのベクトルの成分) が 2 つ以上の添字を持つ量になるが、添字を複数持つものがすべてテンソルであるというわけではない。

例えばベクトルの成分は添字を 1 つ持つが、ベクトルの成分は座標変換によって特別の仕方で変換する (演習問題 2.6 参照)。添字を 1 つ持つといっても、成分がこの変換則に従わない場合にはベクトルとみなすわけにはいかないのである。本章では、この「**成分が特別の変換則に従う**」ということを「**ベクトルであることの定義**」として採用することからはじめて、テンソルの成分がどのように変換するべきかを導く。その後、テンソル解析への第一歩として、極座標系におけるテンソル解析の解説を行う。

8.1 ベクトルの幾何学的定義

2 次元ユークリッド平面において、デカルト座標から極座標への変換を考えよう。

$$\begin{cases} r = r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \theta(x,y) = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases} , \qquad \begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y = y(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases} \tag{8.1}$$

8.1.1 変位の変換則

微小距離離れた 2 点間の**変位**について、多変数関数の微分の公式をそのまま適用すれば、

$$\Delta r = \frac{\partial r}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial r}{\partial y}\Delta y = \frac{x}{r}\Delta x + \frac{y}{r}\Delta y = \cos\theta\Delta x + \sin\theta\Delta y \tag{8.2}$$

$$\Delta\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \theta}{\partial y}\Delta y = -\frac{y}{r^2}\Delta x + \frac{x}{r^2}\Delta y = -\frac{\sin\theta}{r}\Delta x + \frac{\cos\theta}{r}\Delta y \tag{8.3}$$

および、

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta}\Delta\theta = \cos\theta\,\Delta r - r\sin\theta\,\Delta\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Delta r - y\Delta\theta \tag{8.4}$$

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta}\Delta\theta = \sin\theta\,\Delta r + r\cos\theta\,\Delta\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Delta r + x\Delta\theta \tag{8.5}$$

が得られる。(8.2), (8.3) 式を行列表示して、

$$\begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \tag{8.6}$$

とすると、当然であるが、

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{r} & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta\theta \end{bmatrix} \tag{8.7}$$

は (8.4), (8.5) 式に一致することがわかる。

極座標には限らない一般の座標系 (ξ, η) への変換の場合にも、

$$\Delta\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\xi}{\partial y}\Delta y \tag{8.8}$$

$$\Delta\eta = \frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\eta}{\partial y}\Delta y \tag{8.9}$$

が成り立つ。(ξ, η) が質の良い座標であるためには、任意の異なる (x_1, y_1), (x_2, y_2) が、異なる (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) に移されていることが必要である。そのためには、上の連立方程式の解が一意に定まっていなければならない。その条件は、

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{bmatrix} \neq 0 \tag{8.10}$$

である。この行列式は座標変換 (8.8), (8.9) の**ヤコビアン (Jacobian)** となっている。ヤコビアンがゼロになるような点があると、そこでの座標変換は特異になっているので注意が必要である[*1]。

出席課題 S.8.1：　(8.2), (8.3) 式を示せ。

出席課題 S.8.2：　(8.7) 式が (8.4), (8.5) 式に一致することを示せ。

8.1.2　ベクトルの幾何学的な定義：多変数関数の微分から

ベクトルを幾何学的に定義[*2]する 1 つの方法は、

ベクトルの定義

> その成分が任意の座標変換の下で、変位と同じように変換するものをベクトルとして定義する

ことである。すなわち、変位 $(\Delta x, \Delta y)$ は変位ベクトル $\Delta\boldsymbol{x}$ のデカルト座標における成分である。変位ベクトルの成分の変換則 (8.8), (8.9) から、任意のベクトル $\boldsymbol{V}$ の成分について、

$$\begin{bmatrix} V^\xi \\ V^\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^x \\ V^y \end{bmatrix} \equiv \Lambda \begin{bmatrix} V^x \\ V^y \end{bmatrix} \tag{8.11}$$

が成り立つ。逆に、**その成分が変換則 (8.11) に従うものをベクトルと呼ぶ**のである。

[*1] 座標特異点と呼ばれる。

[*2] 代数的なベクトルの定義もある。普通の線形代数の教科書には必ず書かれているので調べてみること。

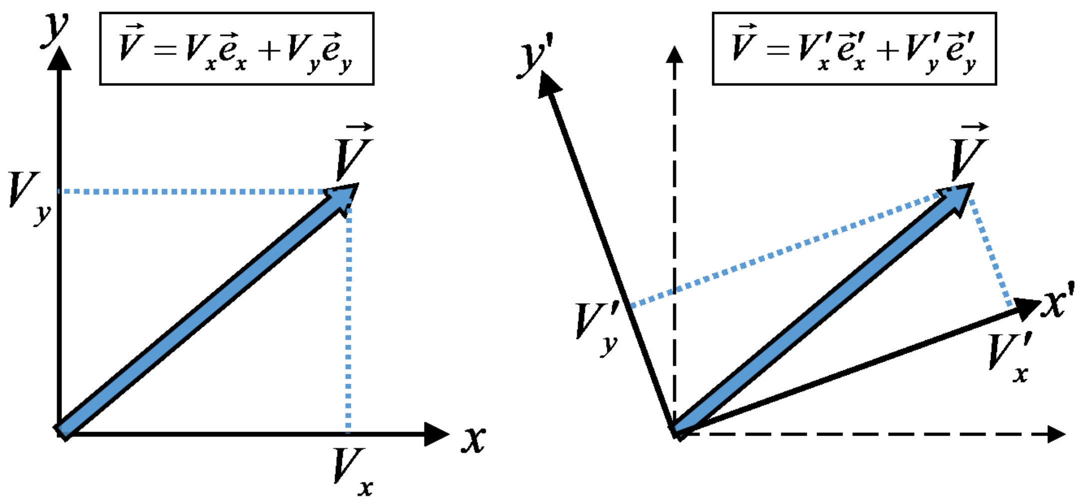

図 8.1　ベクトル $\vec{V}$ は幾何学的実体であり座標変換で不変。その成分 (基底による表現) が変化するのみ。

ここで、ベクトルについて 1 つ重要な注意をしておく*3。それは、ベクトルは幾何学的な実体であり座標概念とは独立に存在するということである。すなわち、

$$\boldsymbol{V} = V^x \boldsymbol{e}_x + V^y \boldsymbol{e}_y = V^\xi \boldsymbol{e}_\xi + V^\eta \boldsymbol{e}_\eta \tag{8.12}$$

の $\boldsymbol{V}$ そのものは座標系に依らない普遍的な幾何学的実体であり、その座標成分 (観測者がする表現の仕方) が座標系 (あるいは物理学では観測者) によって異なるだけなのである (図 8.1 参照)。やや乱暴だが、これは、三角形を考えた場合に、三角形そのものは幾何学的なもので座標とは独立に存在し、その頂点の位置などの表現の仕方が座標系によって異なることに対比できる。

ベクトルの「成分」の変換則

ベクトルの成分の変換則を**アインシュタインの和の規約**を用いて表せば、

$$V^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} V^j \equiv \Lambda^{i'}_{j} V^j \tag{8.13}$$

となる。ここでプライム $'$ のついていない添字は (x, y) を、プライムがついている添字は (ξ, η) を表す。上記の例は 2 次元なので、添字の範囲は 1 ～ 2 である。

また、これまでは添字の上下について特に違いはないとしてきたが、これ以降では**添字を上下には重要な意味がある**ので注意してほしい*4。多くの教科書で、**ベクトルの成分を表す添字を上付きにする**という約束がとられている。

この場合、**基底ベクトルの方向を表す添字は下付きになる**。アインシュタインの和の規約を用いると、(8.12) 式は

$$\boldsymbol{V} = V^i \boldsymbol{e}_i = V^{i'} \boldsymbol{e}_{i'} \tag{8.15}$$

*3ベクトルだけでなくテンソルなどの他の幾何学的対応物にも当てはまる。

*4少しだけ先取りになるが簡単に触れておくと、その成分が

$$\begin{bmatrix} \omega_\xi, & \omega_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x, & \omega_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \qquad \omega_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \omega_j = \Lambda^{j}{}_{i'} \omega_j \tag{8.14}$$

のように変換する幾何学的対応物があるからである。双対ベクトル、あるいは 1 形式などと呼ばれる。

と書くことができる。ここで $\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}_{i'}$ は異なる座標系の基底ベクトルであることに注意しよう。繰り返しになるが、ベクトルは普遍的な幾何学的実体であり、その表し方が基底によって違うだけである。(8.15) 式はその事実を端的に表している。

8.1.3　ベクトルの「基底」の変換則

ベクトルの成分の変換則から、基底ベクトルの変換則が次のようにして得られる。変換則 (8.11) を (8.15) に代入すると、

$$\boldsymbol{V} = V^i \boldsymbol{e}_i = \Lambda^{i'}_j V^j \boldsymbol{e}_{i'} \tag{8.16}$$

となる。ここで、和が取られている添字は、他の添字との競合が生じない限り、自由に変えてよいことを用いると、

$$\boldsymbol{V} = V^i \boldsymbol{e}_i = V^i \Lambda^{j'}_i \boldsymbol{e}_{j'} \ \longrightarrow \ V^i(\boldsymbol{e}_i - \Lambda^{j'}_i \boldsymbol{e}_{j'}) = 0 \tag{8.17}$$

となるが、任意の V^i(すなわち任意の $\boldsymbol{V}$) について成り立つためには、基底ベクトルの変換則は、

$$\boldsymbol{e}_i = \Lambda^{j'}_i \boldsymbol{e}_{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \boldsymbol{e}_{j'} \tag{8.18}$$

でなければならない。**ベクトルの成分と基底ベクトルの変換則との違いに注意**しよう。

ここで、

$$\Lambda^j_{i'} \equiv \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \tag{8.19}$$

を多変数関数の偏微分とみなして考えると、

$$\Lambda^{i'}_j \Lambda^k_{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial}{\partial x^j} x^k(x^{i'}) = \frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta^k_j \tag{8.20}$$

となるので、$\Lambda^k_{i'}$ は $\Lambda^{i'}_j$ の逆変換行列である。これを用いると、基底ベクトルの変換は、

$$\boldsymbol{e}_{i'} = \Lambda^j_{i'} \boldsymbol{e}_j \tag{8.21}$$

とも表すことができる。

出席課題 S.8.3：　(8.20) 式を示せ。
ヒント　関数 $f(x^{i'})$ を x^j で偏微分した

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \tag{8.22}$$

を用いる。

出席課題 S.8.4：　ベクトルの成分の変換則を (8.13) 式とするとき、基底の変換則が (8.18) 式となることを示せ。

略解　ベクトルは幾何学的な存在であり、基底のとり方に依らない。ただし、成分は基底によって異なる。(8.12) 式をより抽象的にあらわせば、

$$\boldsymbol{V} = V^i \boldsymbol{e}_i = V^{i'} \boldsymbol{e}_{i'} \tag{8.23}$$

ここで、成分の変換則 (8.13) より、

$$V^{i'} \boldsymbol{e}_{i'} = \Lambda^{i'}_j V^j \boldsymbol{e}_{i'} = V^j (\Lambda^{i'}_j \boldsymbol{e}_{i'}) \tag{8.24}$$

この右辺が $V^j \boldsymbol{e}_j$ と等しくなるためには、

$$\boldsymbol{e}_j = \Lambda^{i'}_j \boldsymbol{e}_{i'} \tag{8.25}$$

両辺に $\Lambda^j_{k'}$ を作用させると、(8.20) 式より、

$$\Lambda^j_{k'}\boldsymbol{e}_j = \Lambda^j_{k'}\Lambda^{i'}_j\boldsymbol{e}_{i'} = \delta^{i'}_{k'}\boldsymbol{e}_{i'} = \boldsymbol{e}_{k'} \tag{8.26}$$

添字を変えれば $\boldsymbol{e}_{i'} = \Lambda^j_{i'}\boldsymbol{e}_j$。

8.2 双対ベクトル

テンソルを定義するための次の準備として、双対ベクトルという概念を導入する。ここでは詳しくは述べないが、双対ベクトル空間は、ベクトル空間を考えると自然に (必ず) 導入されるもうひとつのベクトル空間であり、文字通りベクトルの双対 (dual, 双子) のようなものである[*5]。双対ベクトルは、ベクトルから実数への**線形**関数 (写像) として与えられる[*6]。

8.2.1 双対ベクトルの「成分」とその変換則

$\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ をある双対ベクトルとする。任意の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ の下での $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ の成分 $\tilde{\omega}_i$ を、$\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ によって $\boldsymbol{e}_i$ が移された実数値

$$\tilde{\omega}_i \equiv \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{e}_i) \tag{8.27}$$

として定義する。

縦横ベクトルを用いた説明： 横ベクトル (双対ベクトル)

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_1 & \tilde{\omega}_2 & \tilde{\omega}_3 \end{bmatrix} \tag{8.28}$$

と基底縦ベクトル (基底ベクトル)

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8.29}$$

との行列積 (内積) を計算すると、

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_1 & \tilde{\omega}_2 & \tilde{\omega}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{\omega}_1, \quad \cdots \tag{8.30}$$

のようにその成分が得られる。定義 (8.27) はこのことを抽象化してあらわしたものである。

ここで、**双対ベクトルの成分は下付きの添字を持ち、ベクトルの成分は上付き添字を持つと約束する**。このように約束しておけば、双対ベクトルをあらわす ∼(チルダ) は不要になるが、以下の議論ではしばらく ∼ (チルダ) を残しておくことにする。

[*5] 直感的には、縦ベクトルが与えられれば必ずそれを横ベクトル化したものが考えられるから、ベクトル空間にはその双子のベクトル空間が付随していると考えておけば十分である。より詳しい議論については、かなり高度になるが、斎藤 毅著,「線形代数の世界:抽象数学の入り口」(東京大学出版会) を参照のこと。

[*6] これも直感的には、横ベクトル (双対ベクトル) と縦ベクトル (ベクトル) を (行列として) 掛ければ実数 (内積) になることから、横ベクトル (双対ベクトル) は縦ベクトル (ベクトル) から実数を作り出す操作 (関数・写像) として導入できると考えておけばよい。

双対ベクトルの線形性とベクトルへの作用

双対ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ の作用が線形であることは重要である。この性質により、任意のベクトル $\boldsymbol{V} = V^i \boldsymbol{e}_i$ への作用において、V^i を外に出すことが可能となり、

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{V}) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(V^i \boldsymbol{e}_i) = V^i \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{e}_i) = V^i \tilde{\omega}_i \tag{8.31}$$

となる。この表式はベクトル $\boldsymbol{V}$ と双対ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ を単にベクトルとみなして**内積をとったものとは異なる**。どのように違うのかについては 8.4 節で説明する。

双対ベクトルの成分の変換則

双対ベクトルの成分の変換則を導こう。基底ベクトル $\boldsymbol{e}_{i'}$ の下での成分は

$$\tilde{\omega}_{i'} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{e}_{i'}) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\Lambda^j_{\ i'} \boldsymbol{e}_j) = \Lambda^j_{\ i'} \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{e}_j) = \Lambda^j_{\ i'} \tilde{\omega}_j \tag{8.32}$$

のように変換する。これは基底ベクトルの変換則と同じであることに注意しよう*7。双対ベクトルの成分の変換則より、双対ベクトルのベクトルへの作用は座標系に依らないことが示される。実際、

$$V^{i'} \tilde{\omega}_{i'} = (\Lambda^{i'}_{\ j} V^j)(\Lambda^k_{\ i'} \tilde{\omega}_k) = \Lambda^{i'}_{\ j} \Lambda^k_{\ i'} V^j \tilde{\omega}_k = \delta^k_j V^j \tilde{\omega}_k = V^j \tilde{\omega}_j = V^i \tilde{\omega}_i \tag{8.33}$$

となるので、たしかに座標不変である。

8.2.2　双対ベクトルの「基底」とその変換則

双対ベクトルの基底双対ベクトルを考えよう。すなわち、

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\omega}_i \tilde{\boldsymbol{\xi}}^i \tag{8.34}$$

となるような基底双対ベクトル $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^i$ を定義したい。この場合に双対ベクトルのベクトルへの作用を計算すると、

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{V}) = \tilde{\omega}_i \tilde{\boldsymbol{\xi}}^i (V^j \boldsymbol{e}_j) = \tilde{\omega}_i V^j \tilde{\boldsymbol{\xi}}^i (\boldsymbol{e}_j) \tag{8.35}$$

となるので、これが (8.33) の結果と一致するためには、

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}^i (\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j \tag{8.36}$$

が成り立っていばよい。これは、i **番目の双対基底ベクトルの、**j **番目の成分を定義**している。

基底ベクトルの場合と同様に、双対基底ベクトルの変換則は、$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\omega}_i \tilde{\boldsymbol{\xi}}^i = \tilde{\omega}_{i'} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^{i'}$ が座標に依らない幾何学的な存在であることと、双対ベクトルの成分の変換則 (8.32) から

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{i'} = \Lambda^{i'}_{\ j} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^j \tag{8.37}$$

のように得られる (演習問題)。

出席課題 S.8.5：　基底双対ベクトル (基底横ベクトル) を以下の場合について求めよ。

*7 成分の変換性が基底ベクトルの変換性と同じため、共変ベクトルと呼ばれることもあるが、一時代前の古めかしい響きを感じてしまう。

1.　基底縦ベクトルとして

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8.38}$$

を選んだ場合。

2.　基底縦ベクトルとして

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8.39}$$

を選んだ場合

略解　1.　基底横ベクトル (基底双対ベクトル) を

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}^1 = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}^1_1 & \tilde{\xi}^1_2 & \tilde{\xi}^1_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}}^2 = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}^2_1 & \tilde{\xi}^2_2 & \tilde{\xi}^2_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}}_3 = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}^3_1 & \tilde{\xi}^3_2 & \tilde{\xi}^3_3 \end{bmatrix} \tag{8.40}$$

とおくと、

$$1 = \delta^1_1 = \tilde{\boldsymbol{\xi}}^1(\boldsymbol{e}_1) = \begin{bmatrix} \tilde{\xi}^1_1 & \tilde{\xi}^1_2 & \tilde{\xi}^1_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \xi^1_1 \tag{8.41}$$

さらに、

$$0 = \delta^1_2 = \tilde{\boldsymbol{\xi}}^1(\boldsymbol{e}_2) = \xi^1_2, \qquad 0 = \delta^1_3 = \tilde{\boldsymbol{\xi}}^1(\boldsymbol{e}_3) = \xi^1_3 \tag{8.42}$$

よって、

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{8.43}$$

同様に計算すれば、

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{\xi}}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8.44}$$

となる。

2.　各自の課題とする。

8.3　テンソルの定義：双対ベクトルの拡張として

8.3.1　(0,2) テンソル

(0,2) テンソルとは、2 つのベクトルから実数への線形写像である[*8]。双対ベクトルの場合の拡張として、任意の (0,2) テンソル $\boldsymbol{T}$ の成分 T_{ij} は、

$$T_{ij} \equiv \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \tag{8.45}$$

で与えられる。2 つの任意のベクトル $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ への作用は、

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}) = \boldsymbol{T}(V^i\boldsymbol{e}_i, W^j\boldsymbol{e}_j) = V^iW^j(\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = V^iW^jT_{ij} \tag{8.46}$$

であり、これは座標不変である。

[*8] この表記法を用いれば、双対ベクトルは (0,1) テンソルである。

(0,2) テンソルの基底

(0,2) テンソルの”基底”を $\boldsymbol{\tau}^{ij}$ とおくと、

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = T_{ij}\boldsymbol{\tau}^{ij}(V^k\boldsymbol{e}_k, W^l\boldsymbol{e}_l) = V^kW^lT_{ij}\boldsymbol{\tau}^{ij}(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l) \tag{8.47}$$

となる。これが (8.46) 式と一致するためには、

$$\boldsymbol{\tau}^{ij}(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l) = \delta^i_k\delta^j_l \tag{8.48}$$

であればよく、これは双対基底 $\boldsymbol{\xi}^i$ を用いて、

$$\boldsymbol{\tau}^{ij} = \tilde{\boldsymbol{\xi}}^i\tilde{\boldsymbol{\xi}}^j \tag{8.49}$$

であれば成立する。これが (0,2) テンソルの”基底”である。すなわち、

$$\boldsymbol{T} = T_{ij}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^i\tilde{\boldsymbol{\xi}}^j \tag{8.50}$$

である。

(0,2) テンソルの成分の変換則

(0,2) テンソルの成分の変換則は、

$$T_{i'j'} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_{i'},\boldsymbol{e}_{j'}) = \boldsymbol{T}(\Lambda^k_{\ i'}\boldsymbol{e}_k, \Lambda^l_{\ j'}\boldsymbol{e}_l) = \Lambda^k_{\ i'}\Lambda^l_{\ j'}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l) = \Lambda^k_{\ i'}\Lambda^l_{\ j'}T_{kl} \tag{8.51}$$

で与えられる。

出席課題 S.8.6：　テンソルが線形写像であることは、(8.51) 式においてどのように用いられているか説明せよ。

略解　$\boldsymbol{T}(\Lambda^k_{\ i'}\boldsymbol{e}_k, \Lambda^l_{\ j'}\boldsymbol{e}_l) = \Lambda^k_{\ i'}\Lambda^l_{\ j'}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_k,\boldsymbol{e}_l)$ において、Λ を前に出す操作は、テンソルが線形写像でないと行えない。

8.3.2　(2,0) テンソルおよび (1,1) テンソル

同様に、(2,0) テンソルとは、2 つの**双対ベクトル**から実数への線形写像であり、(1,1) テンソルとは、双対ベクトルとベクトルから実数を与える線形写像として定義される。より添字を多く持つ高階のテンソルについても同様である。

例えば、(2,0) テンソル $\boldsymbol{T}$ は

$$\boldsymbol{T} = T^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{8.52}$$

のように基底を用いて表され、その成分は確かに

$$\boldsymbol{T}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^i,\tilde{\boldsymbol{\xi}}^j) = T^{kl}(\boldsymbol{e}_k\tilde{\boldsymbol{\xi}}^i)(\boldsymbol{e}_l\tilde{\boldsymbol{\xi}}^j) = T^{kl}\delta^i_k\delta^j_l = T^{ij} \tag{8.53}$$

であり、成分の変換則は

$$T^{i'j'} = \boldsymbol{T}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{i'},\tilde{\boldsymbol{\xi}}^{j'}) = \boldsymbol{T}(\Lambda^{i'}_{\ k}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^k, \Lambda^{j'}_{\ l}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^l) = \Lambda^{i'}_{\ k}\Lambda^{j'}_{\ l}T^{kl} \tag{8.54}$$

となる。

出席課題 S.8.7： (1,1) テンソル $\boldsymbol{T}$ が

$$\boldsymbol{T} = T_i{}^j \tilde{\boldsymbol{\xi}}^i \boldsymbol{e}_j \tag{8.55}$$

と基底を用いて表されることを説明し、その成分の変換則が

$$T_{i'}{}^{j'} = \Lambda^k_{i'} \Lambda^{j'}_l T_k{}^l \tag{8.56}$$

となることを示せ。

8.4 計量テンソル

8.4.1 内積と計量テンソル

内積を、2 つのベクトルからスカラー (すなわち実数) を与える操作であると考えると、内積に関連する (0, 2) のテンソルが定義できるのではないかと考えられる。実際、そのようなテンソルは存在し、**計量テンソル**と呼ばれる[*9]。

内積演算子を · とすると、ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の内積は

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = (A^i \boldsymbol{e}_i) \cdot (B^j \boldsymbol{e}_j) = A^i B^j (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) \tag{8.57}$$

のように与えられる。一方、内積を与える (0,2) の計量テンソル $\boldsymbol{g}$ が存在するとすると、その作用は

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (g_{ij} \tilde{\boldsymbol{\xi}}^i \tilde{\boldsymbol{\xi}}^j)(A^k \boldsymbol{e}_k)(B^l \boldsymbol{e}_l) = g_{ij} A^k B^l \delta^i_k \delta^j_l = g_{ij} A^i B^j \tag{8.58}$$

と表されるはずである。ここで、

$$g_{ij} \equiv \boldsymbol{g}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \tag{8.59}$$

は計量テンソルの成分である。(8.57) と (8.58) を比較すると、計量テンソルの成分は

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \tag{8.60}$$

で与えられることがわかる[*10]。

内積の対称性から、計量テンソルは対称テンソルである。すなわち、計量テンソルの成分は、

$$g_{ij} = g_{ji} \tag{8.61}$$

を満たす。計量テンソルを用いると、ベクトルの内積は

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = g_{ij} A^i B^j \tag{8.62}$$

と表される。

3 次元ユークリッド空間におけるデカルト座標の場合には、

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.63}$$

であるが、極座標や円筒座標の場合には計量テンソルの成分は違ったものになる (8.4.3 節参照)。

出席課題 S.8.8： (8.58) 式を示せ。

[*9] 計量テンソルは一般相対性理論で中心的な役割を果たす。

[*10] ユークリッド空間や、特殊相対性理論におけるミンコフスキー時空のように、内積が自然に定義される場合には、内積によって計量テンソルの成分を与えるこの考え方でよい。しかし、一般相対性理論におけるような曲がった時空や空間の場合には、自然な内積が存在しないので、議論を逆転する必要がある。すなわち、計量テンソルを決めると (空間あるいは時空の性質が決まり)、内積が定義されると考えなければならない。

8.4.2　計量テンソルによるベクトルと双対ベクトルの対応付け

ここで、後で基本的な役割を果たす重要な概念を導入する。それは、**計量テンソルがベクトルと双対ベクトルの間の対応付けを与える**という考え方である[*11]。これは、ベクトル $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$ の内積操作 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = g_{ij}V^iW^j$ と、双対ベクトル $\tilde{\boldsymbol{W}}$ のベクトルへ $\boldsymbol{V}$ の作用 V^iW_i を同一視することによって達成される。すなわち、

$$\tilde{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{g}(\ ,\boldsymbol{W}) = g_{ij}W^i\tilde{\boldsymbol{\xi}}^j \tag{8.64}$$

と対応付けを定義すれば、

$$\tilde{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W}) = g_{ij}V^jW^i = g_{ij}V^iW^j \tag{8.65}$$

となる。

双対ベクトル $\tilde{\boldsymbol{W}}$ は双対基底ベクトルを用いて

$$\tilde{\boldsymbol{W}} = \tilde{W}_j\tilde{\boldsymbol{\xi}}^j \tag{8.66}$$

と記述できるので、これを (8.64) 式と比べれば、成分の関係は

$$W_j = g_{ij}W^i \tag{8.67}$$

となる。

ベクトルの成分 W^i と、計量テンソルによって対応付けられた双対ベクトルの成分 $\tilde{W}_i = g_{ij}W^j$ では計量テンソルの寄与の分違いがあることになるが、それでも (8.64) 式を計量テンソルによるベクトルと双対ベクトルの間の対応付けとみなせる理由は以下による。

その理由を説明する前に、前章までの議論で添え字の上付きと下付きを特に区別していなかった事情について述べておく。それは、デカルト座標では $g_{ij} = \delta_{ij}$ より $\tilde{W}_j = W^j$ であり、ベクトルと双対ベクトルの区別をしなくても実質的に問題が生じなかったことが主要因の一つである。ただし、極座標や円筒座標などの曲がった座標系や、一般相対性理論にあらわれる曲がった空間の場合には一般に $g_{ij} \neq \delta_{ij}$ であり、ベクトルと双対ベクトルは違ったものであり、添字の上付きと下付きは異なるものであることに注意する必要がある。

計量テンソルの「逆」

さて、計量テンソルによってベクトルと双対ベクトルの間の対応付けをが自然に定義できる理由について説明しよう。

まず、計量テンソルの成分 g_{ij} を行列とみなしたとき、それが逆行列 g^{ij} を持つ、すなわち、

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k \tag{8.68}$$

を満たす g^{jk} が存在するとしよう。このとき、g^{jk} を成分として持つ (2,0) テンソル

$$\boldsymbol{g}^{-1} \equiv g^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j \tag{8.69}$$

を定義することができる。これは計量テンソルの”逆”ともいうべきものである。

[*11] $(0,2)$ テンソルがベクトルから双対ベクトルへの写像とみなせるというのは以前にも述べたが、ここではさらに一歩踏み込んで、計量テンソルは特別なテンソルで、ベクトルと双対ベクトルの間の「対応付け」がこれによってなされるとしている。

そして対応付けへ

$\boldsymbol{g}^{-1}$ の双対ベクトル (8.64) への作用は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{W}}) &= (g^{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j)(g_{kl}W^k\tilde{\boldsymbol{\xi}}^l) = g^{ij}g_{kl}W^k\boldsymbol{e}_i\delta^l_j = g^{ij}g_{kj}W^k\boldsymbol{e}_i \\ &\overset{(8.68)}{=} \delta^i_k W^k\boldsymbol{e}_i = W^i\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{W}\end{aligned} \tag{8.70}$$

となって、元のベクトルが回復される。

また、計量テンソルの逆による成分の関係式

$$V^i = g^{ij}V_j \tag{8.71}$$

の両辺に W_i を作用させると

$$(\text{左辺}) = V^iW_i = V^i(g_{ij}W^j) = g_{ij}V^iW^j \overset{(8.62)}{=} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{W} \tag{8.72}$$

$$(\text{右辺}) = g^{ij}V_iW_j = \tilde{\boldsymbol{V}}\cdot\tilde{\boldsymbol{W}} \tag{8.73}$$

となるので、ベクトルの内積と、ベクトルを計量テンソルで双対ベクトル化したものの”内積的操作” を同一視することができる。

以上により、ベクトルと双対ベクトルの間に対応付けがなされる。そのご利益としては、例えば

$$V^iW_i = V^ig_{ij}W^j = (g_{ij}V^i)W^j = V_jW^j = V_iW^i \tag{8.74}$$

のように、「和がとられている添字」については、基本的にその上下を気にしなくてよいことが挙げられる。上の導出からも分かるように、この結果は、$g_{ij} = \delta_{ij}$ ではない場合にも成り立つ。

8.4.3　2 次元極座標系での計量テンソル

2 次元極座標を例に、計量テンソルの成分を計算しよう。基底ベクトルの変換則 (8.21) より、

$$\boldsymbol{e}_r = \Lambda^x_r\boldsymbol{e}_x + \Lambda^y_r\boldsymbol{e}_y = \frac{\partial x}{\partial r}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\boldsymbol{e}_y = \cos\theta\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\boldsymbol{e}_y \tag{8.75}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \Lambda^x_\theta\boldsymbol{e}_x + \Lambda^y_\theta\boldsymbol{e}_y = \frac{\partial x}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_y = -r\sin\theta\boldsymbol{e}_x + r\cos\theta\boldsymbol{e}_y \tag{8.76}$$

である。ここで、演習問題 1.2.1 の場合とは異なり、$\boldsymbol{e}_\theta$ **は規格化されていないことに注意しよう**。実際

$$|\boldsymbol{e}_\theta| = r \tag{8.77}$$

となっている。

ここで、$\boldsymbol{e}_\theta$ が r に依存するのは、この場合には、座標 (格子点) を基本としているからである[*12]。例えば、図 8.2 に示すように、2 次元極座標で点 $P(r_P, \theta_P) = (r, d\theta)$ と、点 $Q(r_Q, \theta_Q) = (4r, d\theta)$ を比べたとき、θ 座標は $\theta_P = \theta_Q$ で同じであるが、その幾何学的な位置 ($\theta = 0\,(x$ 軸) からの離れ具合) は異なる。このことは、点 Q における基底ベクトルが点 P の基底ベクトルよりも長くなっていなければならないことを

[*12] このような基底を座標基底と呼ぶ。これに対して、演習問題 1.2 における規格化された基底は非座標基底と呼ばれる。実は、一般相対論をはじめとして、テンソル解析が活躍する物理学では非座標基底が用いられることはほとんどない。それにもかかわらず、大学ではじめて習うベクトル解析では極座標系などにおいて非座標基底が用いられている。どちらがわかりやすいかはさておき、応用面から考えると実にもったいないことである。

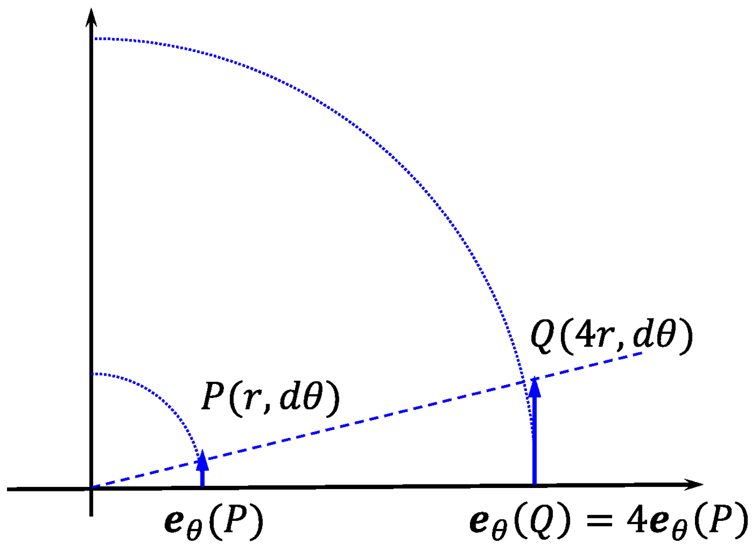

図 8.2　2 次元極座標における同一の θ 座標を持つ点 P, Q の位置及び θ 方向の基底ベクトル $\boldsymbol{e}_\theta$ の r 依存性

意味する。すなわち、r の値によって $\boldsymbol{e}_\theta$ の大きさが変わらなければならない。したがって、**規格化された基底を用いた演習問題 1.2 の結果と一部異なるところがあることに注意する必要がある。**

同様に、基底双対ベクトルは (8.37) より、

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}^r = \frac{\partial r}{\partial x}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^x + \frac{\partial r}{\partial y}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^y = \cos\theta\,\tilde{\boldsymbol{\xi}}^x + \sin\theta\,\tilde{\boldsymbol{\xi}}^y \tag{8.78}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}^\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^x + \frac{\partial \theta}{\partial y}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^y = -\frac{\sin\theta}{r}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^x + \frac{\cos\theta}{r}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^y \tag{8.79}$$

となる。

これより、計量テンソルの成分は、

$$g_{rr} = \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_r = 1, \qquad g_{\theta\theta} = \boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta = r^2, \qquad g_{r\theta} = g_{\theta r} = 0 \tag{8.80}$$

および、

$$g^{rr} = \tilde{\boldsymbol{\xi}}^r \cdot \tilde{\boldsymbol{\xi}}^r = 1, \qquad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \qquad g^{r\theta} = g^{\theta r} = 0 \tag{8.81}$$

となる。(8.80) を

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \tag{8.82}$$

と行列表示してその逆を求めると

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} \end{pmatrix} \tag{8.83}$$

となり、これは (8.81) の結果と一致している。

8.5　共変微分とクリストッフェル (Christoffel) 記号

8.5.1　クリストッフェル記号

ベクトルの微分を考える際には、基底ベクトルが一定であるかどうかに注意する必要がある。すなわち、$\boldsymbol{V} = V^i \boldsymbol{e}_i$ の微分は、

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}(V^i \boldsymbol{e}_i) = \frac{\partial V^i}{\partial x^j}\boldsymbol{e}_i + V^i \frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j} \tag{8.84}$$

であることに注意する必要がある。ここで、$\partial \boldsymbol{e}_i / \partial x^j$ はベクトルであるから、基底ベクトル $\boldsymbol{e}_k$ で展開できるはずである。それを

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^k{}_{ij} \boldsymbol{e}_k \tag{8.85}$$

と表そう。$\Gamma^k{}_{ij}$ が 3 つの添字を必要とすることに注意しよう。すなわち、

1. i 番目の基底ベクトルを
2. j 方向に微分してできたベクトルの
3. k 成分が $\Gamma^k{}_{ij}$ である。

この $\Gamma^k{}_{ij}$ は非常に有用であり、**クリストッフェル (Christoffel) 記号**と呼ばれる。

例として、2 次元極座標の場合に、クリストッフェル記号を計算しよう。この場合、例えば $\partial \boldsymbol{e}_\theta / \partial r$ を計算すると、(8.85) 式から分かるように、$\Gamma^k_{\theta r}$ を求めることができる。実際に微分を実行すると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\big(-r\sin\theta \boldsymbol{e}_x + r\cos\theta \boldsymbol{e}_y\big) = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta = 0\cdot \boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta \tag{8.86}$$

これと (8.85) 式から成り立つ

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r} = \Gamma^r_{\theta r}\boldsymbol{e}_r + \Gamma^r_{\theta r}\boldsymbol{e}_\theta \tag{8.87}$$

を比べると

$$\Gamma^r{}_{\theta r} = 0, \quad \Gamma^\theta{}_{\theta r} = \frac{1}{r} \tag{8.88}$$

が得られる。

基底ベクトルのこれ以外の微分を計算すると、その他のクリストッフェル記号を求めることができて、その結果は

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\big(\cos\theta \boldsymbol{e}_x + \sin\theta \boldsymbol{e}_y\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Gamma^r{}_{rr} = \Gamma^\theta{}_{rr} = 0 \tag{8.89}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta} = -\sin\theta \boldsymbol{e}_x + \cos\theta \boldsymbol{e}_y = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \Gamma^r{}_{r\theta} = 0, \quad \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \frac{1}{r} \tag{8.90}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta} = r\cos\theta \boldsymbol{e}_x - r\sin\theta \boldsymbol{e}_y = -r\boldsymbol{e}_r \quad \Rightarrow \quad \Gamma^r{}_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = 0 \tag{8.91}$$

である。

8.5.2　ベクトル場の共変微分

クリストッフェル記号を用いると、ベクトルの微分 (8.84) は

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x^j} = \frac{\partial V^i}{\partial x^j}\boldsymbol{e}_i + V^i \Gamma^k{}_{ij}\boldsymbol{e}_k \tag{8.92}$$

となる。ここで、和がとられている添字は競合が生じない限り自由に付け替えることができるから、

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x^j} = \frac{\partial V^i}{\partial x^j}\boldsymbol{e}_i + V^k {\Gamma^i}_{kj}\boldsymbol{e}_i = \left[\frac{\partial V^i}{\partial x^j} + V^k {\Gamma^i}_{kj}\right]\boldsymbol{e}_i \tag{8.93}$$

と書きなおすことができる。この結果をまとめて、ベクトル場の微分は、

$$\nabla_j V^i \equiv \frac{\partial V^i}{\partial x^j} + V^k {\Gamma^i}_{kj} \tag{8.94}$$

なる**成分を持つ**とあらわそう。

かなり面倒ではあるが、単純な計算によって、$\nabla_j V^i$ は (1,1) テンソルの成分の変換則 (8.56)

$$\nabla_{j'} V^{i'} = \Lambda^k_{j'} \Lambda^{i'}_l \nabla_k V^{\,l} \tag{8.95}$$

を満たすことを示すことができる[*13]。したがって、ベクトルすなわち (1,0) テンソルに作用して (1,1) テンソルを与え、その (1,1) テンソルの成分が (8.94) となる操作 (微分) を定義することができる。これを**共変微分**という[*14]。共変微分は、極座標や円筒座標のように座標系が曲がっている場合や、一般相対性理論にあらわれる曲がった時空におけるベクトル場やテンソル場を解析する上で重要な役割を果たす。

(8.94) 式より、共変微分と偏微分の違いはクリストッフェル記号によるものである。一方、(8.85) 式より、クリストッフェル記号は基底ベクトルの微分がゼロでないことからあらわれた。演習問題 1.2 においても、極座標系では基底ベクトルの微分がゼロでないことから、ベクトル場の発散やスカラー場のラプラシアンに余分な項があらわれた。実は、共変微分 (8.94) におけるクリストッフェル記号の項は、この余分な項となっている。

任意の座標系でのベクトルの発散は共変微分を用いて与えられ、

$$\nabla_i V^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + V^k {\Gamma^i}_{ki} \tag{8.96}$$

である。2 次元極座標では、

$$\begin{aligned} {\Gamma^i}_{ri} &= {\Gamma^r}_{rr} + {\Gamma^\theta}_{r\theta} = \frac{1}{r} &(8.97)\\ {\Gamma^i}_{\theta i} &= {\Gamma^r}_{\theta r} + {\Gamma^\theta}_{\theta\theta} = 0 &(8.98)\end{aligned}$$

であるから、ベクトル場の発散は、

$$\nabla_i V^i = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} + V^r\frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV^r\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}V^\theta \tag{8.99}$$

となる。

これは演習問題 1.2 の結果と比べると、$\partial V^\theta/\partial\theta$ の前の因子 $1/r$ だけ違うが、**これは本章のテンソル解析では e_θ の大きさが r となっていることに起因して、成分 V^θ の大きさが $1/r$ 倍になっているためである**。すなわち、

$$\boldsymbol{e}_\theta^{8\,章} = r\boldsymbol{e}_\theta^{1\,章} = r\hat{\boldsymbol{e}}_\theta \tag{8.100}$$

であり、

$$V^\theta_{8\,章} = \frac{1}{r}V^\theta_{1\,章} \tag{8.101}$$

[*13] 一方、$\partial_j V^i$ は (1,1) テンソルの成分の変換則 (8.56) を満たさない。

[*14] 実は、より一般的に、共変微分は (n, m) テンソルに作用して $(n, m+1)$ テンソルを与える。

である。この場合にも、ベクトルそのものは不変である：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V} &= V^r_{8\,章}\boldsymbol{e}^{8\,章}_r + V^\theta_{8\,章}\boldsymbol{e}^{8\,章}_\theta = V^r_{1\,章}\boldsymbol{e}^{1\,章}_r + \frac{1}{r}V^\theta_{1\,章}\,r\boldsymbol{e}^{1\,章}_\theta \\ &= V^r_{1\,章}\boldsymbol{e}^{1\,章}_r + V^\theta_{1\,章}\boldsymbol{e}^{1\,章}_\theta\end{aligned} \tag{8.102}$$

一般に、「普通の」テンソル解析では非座標基底*15 は特別の目的*16を除いて用いられることは少ない。

次に、2 次元極座標におけるスカラー場 ϕ へのラプラシアンを作用を求めよう。ラプラシアンは勾配の発散であるから、双対ベクトル (の成分) $V_j = \partial_j\phi$ からベクトル (の成分) $V^i = \partial^i\phi = g^{ij}\partial_j\phi$ を作り*17、それを (8.99) に代入すれば得られ、その結果は

$$\nabla_i\partial^i\phi = \nabla_i\big(g^{ij}\partial_j\phi\big) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} \tag{8.103}$$

となる。ベクトル場の発散 (8.99) が演習問題 1.2 の結果と異なっていたのに対し、スカラー場のラプラシアンの結果は演習問題 1.2 の結果と一致している。

8.5.3 双対ベクトル場の共変微分

スカラー場は、座標系すなわち基底ベクトルに依存しないので、その共変微分は普通の微分 (偏微分) と同じである。すなわち、

$$\nabla_i\phi = \partial_i\phi \tag{8.104}$$

である。

双対ベクトル $\tilde{\omega}$ がベクトル $\boldsymbol{V}$ へ作用した結果 $\omega_j V^j$ はスカラーであるから座標系によらない。したがって、その共変微分はやはり普通の微分と同じ

$$\nabla_i(\omega_j V^j) = \partial_i(\omega_j V^j) \tag{8.105}$$

である。

ここで、

$$(\text{左辺}) = (\nabla_i V^j)\omega_j + V^j\nabla_i\omega_j = \Big[\partial_i V^j + \Gamma^j{}_{ki}V^k\Big]\,\omega_j + V^j\nabla_i\omega_j \tag{8.106}$$

および

$$(\text{右辺}) = (\partial_i V^j)\omega_j + V^j\partial_i\omega_j, \tag{8.107}$$

より、和が取られている添字を適当に付け替えると、

$$V^j\left[\nabla_i\omega_j - \big(\partial_i\omega_j - \Gamma^k{}_{ji}\omega_k\big)\right] = 0 \tag{8.108}$$

の形にまとめることができる。これが任意の V^j について成り立つので、これより、双対ベクトルの共変微分が

$$\nabla_i\omega_j = \partial_i\omega_j - \Gamma^k{}_{ji}\omega_k \tag{8.109}$$

で与えられることがわかる。

出席課題 S.8.9： 双対ベクトルの共変微分の成分が (8.109) 式となることを示せ。

---

*15 ベクトルを繋いで格子点にたどり着かないような基底。2 次元デカルト座標における $\hat{\boldsymbol{e}}_x$, $\hat{\boldsymbol{e}}_y$ は座標基底、2 次元極座標における $\hat{\boldsymbol{e}}_r$, $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ は **非** 座標基底。

*16 例えば、一般相対性理論において、局所慣性系の観測者が観測する諸量を (特殊相対論に基づいて) 計算する場合など。

*17 スカラー場は基底ベクトルに依存しないのでその共変微分は偏微分と同じである。

8.5.4 テンソル場の共変微分

同様に、$T_{ij}V^iW^j$ がスカラーであることから、(0,2) テンソルの共変微分の成分が

$$\nabla_k T_{ij} = \partial_k T_{ij} - T_{lj}\Gamma^l_{ik} - T_{il}\Gamma^l_{jk} \tag{8.110}$$

で与えられることを示すことができる (演習問題)。

その他のテンソルの共変微分についても同様に計算することができる。

8.6 クリストッフェル記号と計量テンソルの関係

8.6.1 クリストッフェル記号の対称性

スカラー場の 2 階共変微分を考える。共変微分の性質より、それは (0,2) テンソルである。さて、デカルト座標では基底ベクトルが一定であるので、共変微分は偏微分と同じである。したがって、

$$\nabla_i \nabla_j \phi = \partial_i \partial_j \phi \tag{8.111}$$

である。偏微分は交換可能

$$\partial_i \partial_j \phi = \partial_j \partial_i \phi \tag{8.112}$$

であるから、(0,2) テンソル $\nabla_i \nabla_j \phi$ はデカルト座標では対称テンソルである。テンソルの対称性は (連続的な空間) 座標変換によって変わらないから、座標変換をそのようなものに限定すれば、$\nabla_i \nabla_j \phi$ は任意の座標系で対称

$$\nabla_i \nabla_j \phi = \nabla_j \nabla_i \phi \tag{8.113}$$

であると考えられる[*18]。

$\nabla_i \phi$, $\nabla_j \phi$ は双対ベクトルであるから、両辺を (8.109) で評価して比較すると、

$$(\nabla_k \phi)\,\Gamma^k_{ij} = (\nabla_k \phi)\,\Gamma^k_{ji} \tag{8.114}$$

となる。これよりクリストッフェル記号の下付き添字は対称であることがわかる[*19]。

8.6.2 計量テンソルの共変微分

デカルト座標では計量テンソルは一定であるから[*20]、その共変微分はゼロである。

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \qquad \text{(デカルト座標で)} \tag{8.115}$$

ここで、この結果を、共変微分によって (0,2) テンソルである計量テンソルが (0,3) テンソルに移され、その (0,3) テンソルの成分がデカルト座標ではゼロになるものとみなす。(0,3) テンソルの変換則は

$$T_{i'j'k'} = \Lambda^l_{i'}\Lambda^m_{j'}\Lambda^n_{k'}T_{lmn} \tag{8.116}$$

[*18] ユークリッド空間においてはこれでよい。実は、(8.113) 式が成り立たないねじれた空間を考えることも可能であるが、本講義では取り扱わないことにする。

[*19] (8.113) 式が成り立たないねじれた空間ではクリストッフェル記号の下付き添字は対称ではなくなるが、本講義では取り扱わない。

[*20] 本講義では深入りしないが、これは平坦な場合に限った話である。地球表面や一般相対論におけるブラックホール時空のように曲がった空間 (時空) の計量テンソルは一定ではない。この場合、(8.115) 式は (時空の因果律の考察などによる) 要請ということになる。

であるから、あるひとつの座標系で (0,3) テンソルの成分がすべてゼロになるならば、任意の座標でゼロである。したがって、

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \qquad (\text{任意の座標で}) \tag{8.117}$$

が成立する。

したがって、(0,2) テンソルの共変微分 (8.110) より、

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma^l{}_{ik} g_{lj} + \Gamma^l{}_{kj} g_{il} \tag{8.118}$$

となる。少し混みいった添字の付け替え

$$\partial_j g_{ik} = \Gamma^l{}_{ij} g_{lk} + \Gamma^l{}_{jk} g_{il} \tag{8.119}$$

$$-\partial_i g_{jk} = -\Gamma^l{}_{ji} g_{lk} - \Gamma^l{}_{ik} g_{jl} \tag{8.120}$$

$$\tag{8.121}$$

を考え、これら 3 式を加え、計量テンソルが対称テンソルであること、およびクリストッフェル記号の対称性 (8.113) を用いると、

$$\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk} = 2 g_{il} \Gamma^l{}_{jk} \tag{8.122}$$

が得られる。

ここで (8.122) 式の両辺に g^{im} を作用させて、$g^{im} g_{il} = \delta^m_l$ に注意すると、

$$\Gamma^m_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \bigl(\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk} \bigr) \tag{8.123}$$

が得られる。これがクリストッフェル記号と計量テンソルの関係式である[*21]。これより、計量テンソルさえ与えられれば、クリストッフェル記号及び共変微分を計算することができることになる。

8.A　8 章の演習問題

演習問題 8.1: (重要) 双対ベクトルに関する変換則

双対ベクトルの成分および基底の変換則 (8.32), (8.37) 式を導け。

演習問題 8.2: (重要) 2 次元デカルト座標から 2 次元極座標への座標変換

2 次元デカルト座標から 2 次元極座標への変換を考える。

1. (8.13), (8.18) 式に基づき、ベクトルの成分および基底ベクトルの変換則を書き下せ。
2. 極座標での計量テンソルの成分を求めよ。
3. ベクトル $\boldsymbol{V}$ の成分が $(V^r, V^\theta) = (1, 1)$ であるとき、双対ベクトル $\tilde{\boldsymbol{V}}$ の成分を求めよ。
4. 極座標でのクリストッフェル記号を求めよ。
5. 共変微分を用いて、極座標でベクトルの発散、スカラー場のラプラシアンを求めよ。

ヒント：3. では、(8.67) 式を用いる。それ以外の問題は講義ノート参照。

---

*21 一般相対論におけるブラックホール時空のように曲がった空間 (時空) の場合にも、(8.123) 式で定義されるクリストッフェル記号を用いて計量テンソルの共変微分を計算すれば、$\nabla_k g_{ij} = 0$ となっている。

演習問題 8.3: (重要) 3 次元デカルト座標から 3 次元極座標への座標変換

3 次元デカルト座標から 3 次元極座標への変換の場合に、演習問題 8.3 と同じ問題を解け。ただし、設問 2. では $(V^r, V^\theta, V^\varphi) = (1, 1, 1)$ とする。

演習問題 8.4: (重要) (0,2) テンソルの共変微分

$T_{ij}V^iW^j$ がスカラーであることから、(0,2) テンソルの共変微分の成分が (8.110) 式で与えられることを示せ。これを用いて、2 次元極座標における計量テンソルの共変微分がゼロになることを示せ。

演習問題 8.5: (加点問題) ブラックホール時空

シュヴァルツシルトブラックホール時空の計量テンソルは

$$g_{tt} = -c^2\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right), \qquad g_{rr} = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}, \qquad g_{\theta\theta} = r^2, \qquad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta \tag{8.124}$$

で与えられ、これ以外の成分は全てゼロである。ここで g_{tt} は計量テンソルの時間成分である。

1. ベクトル $\boldsymbol{V}$ の成分が $(V^t, V^r, V^\theta, V^\varphi) = (-1, 1, 1, 1)$ であるとき、双対ベクトル $\tilde{\boldsymbol{V}}$ の成分を求めよ。
2. (8.123) 式よりクリストッフェル記号を計算せよ。
   ヒント： ゼロでない成分は
   $$\Gamma^t{}_{rt},\ \Gamma^r{}_{tt},\ \Gamma^r{}_{rr},\ \Gamma^r{}_{\theta\theta},\ \Gamma^r{}_{\varphi\varphi},\ \Gamma^\theta{}_{r\theta},\ \Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi},\ \Gamma^\varphi{}_{r\varphi},\ \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi}$$
   である。
3. 共変微分を用いて、ベクトルの発散を求めよ。

演習問題 8.6: (加点問題) 面積 (体積) 要素テンソルと変換のヤコビアン

(x, y) 座標から (ξ, η) 座標への変換に伴い、面積分の積分要素が

$$dxdy = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) d\xi d\eta = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\xi d\eta \tag{8.125}$$

となることを示せ。同様に、(x, y, z) 座標から (ξ, η, ζ) 座標への変換に伴って、体積要素が

$$dxdydx = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} d\xi d\eta d\zeta \tag{8.126}$$

となることを示せ。

略解 1： 面積要素 $dxdy$ は、微小ベクトル $d\boldsymbol{x}$ と $d\boldsymbol{y}$ が作る長方形 (より一般には平行四辺形) の面積である。つまり、面積要素を得るためには 2 つのベクトルが必要となる。このことから、面積要素は (0,2) テンソルであるとみなすことができる[*22]。双対基底 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}^i$ を用いて、これを

$$d\boldsymbol{S} = (dS)_{ij}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^i\tilde{\boldsymbol{\xi}}^j \tag{8.127}$$

と展開しよう。

$d\boldsymbol{S}$ にベクトル $d\boldsymbol{x} = dx\boldsymbol{e}_x, d\boldsymbol{y} = dy\boldsymbol{e}_y$ を作用させると、面積要素 $dxdy$ が得られるはずなので、

$$\begin{aligned} dxdy = d\boldsymbol{S}(d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{y}) &\equiv (dS)_{ij}\big(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^i(dx\boldsymbol{e}_x)\big)\big(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^j(dy\boldsymbol{e}_y)\big) \\ &= dxdy(dS)_{ij}\big(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^i\boldsymbol{e}_x\big)\big(\tilde{\boldsymbol{\xi}}^j\boldsymbol{e}_y\big) = dxdy(dS)_{ij}\delta^i_x\delta^j_y \\ &= dxdy(dS)_{xy} \end{aligned} \tag{8.128}$$

これより

$$(dS)_{xy} = 1 \tag{8.129}$$

である。一方、平行なベクトルからは平行四辺形を作ることができないので、

$$0 \ = \ d\boldsymbol{S}(d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}) \ = \ d\boldsymbol{S}(d\boldsymbol{y}, d\boldsymbol{y}) \tag{8.130}$$

より

$$(dS)_{xx} = (dS)_{yy} = 0 \tag{8.131}$$

である。

さらに、ベクトル $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の外積が

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w} \ \equiv \ (\text{ベクトル } \boldsymbol{v} \text{ と } \boldsymbol{w} \text{ が作る平行四辺形の面積})\ (\boldsymbol{v} \text{ から } \boldsymbol{w} \text{ へ右ねじが進む向き}) \tag{8.132}$$

で与えられたこと、および

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w} = -(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}) \tag{8.133}$$

であることを考慮し、これらとの整合性が取れるように、

$$d\boldsymbol{S}(d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{y}) = -d\boldsymbol{S}(d\boldsymbol{y}, d\boldsymbol{x}) \tag{8.134}$$

と定義することにする。これより、

$$(dS)_{yx} = -1 \tag{8.135}$$

である。(8.129), (8.131), (8.135) 式で与えられる成分は、空間 2 次元の場合の Levi-Civita 記号

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & (ij \text{ が } 12 \text{ の偶置換}) \\ -1 & (ij \text{ が } 12 \text{ の奇置換}) \end{cases} \tag{8.136}$$

になっている。すなわち、

$$d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \epsilon_{ij} \tag{8.137}$$

(ξ, η) 座標での面積要素の成分 $dS_{i'j'}$ は、面積要素テンソルに $\boldsymbol{e}_{1'} = \boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{e}_{2'} = \boldsymbol{e}_\eta$ を作用させれば得られる：

$$\begin{aligned} dS_{i'j'} &= d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{e}_{i'}, \boldsymbol{e}_{j'}) = d\boldsymbol{S}(\Lambda^k_{i'}\boldsymbol{e}_k, \Lambda^l_{j'}\boldsymbol{e}_l) = \Lambda^k_{i'}\Lambda^l_{j'}d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_l) = \Lambda^k_{i'}\Lambda^l_{j'}\epsilon_{kl} \\ &= \Lambda^1_{i'}\Lambda^2_{j'} - \Lambda^2_{i'}\Lambda^1_{j'} \end{aligned} \tag{8.138}$$

ここで、基底ベクトルの変換則 (8.21) より、

$$\boldsymbol{e}_\xi \ = \ \frac{\partial x}{\partial\xi}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial\xi}\boldsymbol{e}_y, \qquad \boldsymbol{e}_\eta \ = \ \frac{\partial x}{\partial\eta}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial\eta}\boldsymbol{e}_y \tag{8.139}$$

[*22] 本当は (2,0) テンソルである。この意味で、以下の略解 1 は数学的に厳密でない部分がある。

を用いれば、

$$dS_{1'1'} = dS_{2'2'} = 0 \tag{8.140}$$

$$dS_{1'2'} = -dS_{2'1'} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} \tag{8.141}$$

となる。このような単位面積要素の成分の違いにより、

$$dxdy = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right) d\xi d\eta \tag{8.142}$$

となっていると考えることができる。

同様に、体積要素テンソルは、デカルト座標において 3 次元の Levi-Civita 記号を成分に持つ (0,3) のテンソルであり、面積要素と同様の計算から体積要素の変換則が導かれる：

$$\begin{aligned} dS_{i'j'k'} &= \Lambda^l_{i'}\Lambda^m_{j'}\Lambda^n_{k'} d\boldsymbol{S}(\boldsymbol{e}_l, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_n) = \Lambda^l_{i'}\Lambda^m_{j'}\Lambda^n_{k'}\epsilon_{lmn} \\ &= \Lambda^1_{i'}\Lambda^2_{j'}\Lambda^3_{k'} - \Lambda^1_{i'}\Lambda^3_{j'}\Lambda^2_{k'} + \Lambda^3_{i'}\Lambda^1_{j'}\Lambda^2_{k'} - \Lambda^3_{i'}\Lambda^2_{j'}\Lambda^1_{k'} + \Lambda^2_{i'}\Lambda^3_{j'}\Lambda^1_{k'} - \Lambda^2_{i'}\Lambda^1_{j'}\Lambda^3_{k'} \end{aligned} \tag{8.143}$$

これより、

$$dS_{1'2'3'} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \zeta} \tag{8.144}$$

などが得られる。

略解 2： 基底ベクトルの変換則 (8.139) より、

$$\boldsymbol{e}_\xi \times \boldsymbol{e}_\eta = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)(\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y) \tag{8.145}$$

であるから、これより

$$\big((\xi,\eta)\text{ 座標での単位面積要素}\big) = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)\big((x,y)\text{ 座標での単位面積要素}\big) \tag{8.146}$$

を結論付けることも可能である。さらに、ベクトル 3 重積が 3 つのベクトルから作られる平行 6 面体の体積と関連していることを用いれば、体積要素の変換則も導くことができるが技巧的計算を要する。

略解 3： 略解 1 の双対ベクトル版[*23]。全微分の関係

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta, \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta \tag{8.147}$$

を無理やり双対ベクトルの関係

$$d\boldsymbol{x} = \frac{\partial x}{\partial \xi}d\boldsymbol{\xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\boldsymbol{\eta}, \qquad d\boldsymbol{y} = \frac{\partial y}{\partial \xi}d\boldsymbol{\xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\boldsymbol{\eta} \tag{8.148}$$

に格上げし、これより $d\boldsymbol{x}^1 = d\boldsymbol{x},\ d\boldsymbol{x}^2 = d\boldsymbol{y},\ d\boldsymbol{\xi}^1 = d\boldsymbol{\xi},\ d\boldsymbol{\xi}^2 = d\boldsymbol{\eta}$ として、

$$dxdy \equiv |\epsilon_{ij}d\boldsymbol{x}^i d\boldsymbol{x}^j| = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)|\epsilon_{ij}d\boldsymbol{\xi}^i d\boldsymbol{\xi}^j| \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)d\xi d\eta \tag{8.149}$$

とする方法である。同様に、$dxdydx \equiv |\epsilon_{ijk}d\boldsymbol{x}^i d\boldsymbol{x}^j d\boldsymbol{x}^l|$ の変換を考えることで、体積要素の変換則も導くことができる。

[*23] ここでは説明しないが、微分形式を用いた数学的な裏付けも存在し、最も洗練された方法である。