

# 一般相対性理論 (再) 入門 講義ノート

東邦大学理学部物理学科  
関口 雄一郎

2024年3月5日



# 目次

第 1 章	重力と幾何学	1
1.1	等価原理	1
1.2	重力場中での質点の運動	2
1.2.1	局所慣性系 $\Rightarrow$ 一般座標系 (非局所慣性系)	2
1.2.2	一般座標系 (非局所慣性系) $\Rightarrow$ 局所慣性系	3
1.2.3	クリストッフェル記号	4
1.3	幾何学としての重力と測地線	4
第 2 章	一般相対性理論の数学とテンソル解析	9
2.1	一般相対性原理及び一般共変性原理とテンソル場	9
2.2	曲がった時空の準備的考察	10
2.3	数学的準備	11
2.4	方向微分とベクトル	13
2.4.1	ベクトルの幾何学的な定義	13
2.4.2	ベクトルの座標表現	14
2.4.3	ベクトルの変換則	15
2.4.4	4 元速度ベクトル	16
2.4.5	微小変位ベクトル	16
2.5	双対ベクトル	17
2.5.1	双対ベクトルの定義	17
2.5.2	双対ベクトルの変換則	19
2.6	テンソル	19
2.6.1	計量テンソル	19
2.6.2	逆計量テンソル	20
2.6.3	一般のテンソルとその変換則	21
2.6.4	テンソルの縮約と添字の上げ下げ	21
2.7	ベクトルとテンソルの共変微分	23
2.7.1	ベクトルの共変微分	23
2.7.2	スカラー場の共変微分	24
2.7.3	双対ベクトルと一般のテンソルの共変微分	24
2.7.4	テンソルの平行移動と共変微分	25
2.8	共変微分および接続係数に対する要請	26
2.8.1	一般相対性原理からの要請	26

	2.8.2 等価原理からの要請 . . . . .	27
	2.8.3 時空計量に付随する共変微分と因果律 . . . . .	27
	2.8.4 平行移動と測地線 . . . . .	29
2.A	2章の補足 . . . . .	29
	2.A.1 共変微分のテンソル性と接続係数の変換則 . . . . .	29
	2.A.2 接続係数 $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ の対称性と等価原理について . . . . .	30
	2.A.3 クリストッフェル記号の変換則 . . . . .	32
	2.A.4 共変微分の表記について . . . . .	32
	2.A.5 ベクトルの座標基底と接続 . . . . .	32
第3章	重力の本質と時空の曲率 . . . . .	37
3.1	重力場と潮汐力 . . . . .	37
3.2	測地線偏差の方程式とリーマンの曲率テンソル . . . . .	38
	3.2.1 座標基底ベクトルとその交換子 . . . . .	38
	3.2.2 測地線偏差の方程式とリーマンの曲率テンソルの導入 . . . . .	39
3.3	リーマンテンソルの性質 . . . . .	40
	3.3.1 対称性 . . . . .	40
	3.3.2 ビアンキ恒等式 . . . . .	42
	3.3.3 Ricci テンソル、Ricci スカラー、及び Einstein テンソル . . . . .	43
3.4	リーマンテンソルの成分 . . . . .	43
3.A	3章の補足 . . . . .	44
	3.A.1 リーマンの曲率テンソルの幾何学的意味 . . . . .	44
	3.A.2 リーマンの曲率テンソルの分解 . . . . .	46
	3.A.3 ワイルテンソル . . . . .	46
第4章	アインシュタイン方程式 . . . . .	51
4.1	物質場の作用 . . . . .	51
	4.1.1 平坦な時空における運動方程式 . . . . .	51
	4.1.2 一般相対論への拡張 . . . . .	52
	4.1.3 エネルギー運動量テンソル . . . . .	54
4.2	重力場の作用 . . . . .	56
	4.2.1 アインシュタイン-ヒルベルト作用 . . . . .	56
	4.2.2 アインシュタイン方程式の導出 . . . . .	57
4.3	対称性と保存則 . . . . .	59
	4.3.1 数学的準備：リー微分 . . . . .	59
	4.3.2 キリングベクトルと保存則 . . . . .	63
	4.3.3 エネルギー運動量の保存 . . . . .	64
4.4	線形化されたアインシュタイン方程式 . . . . .	66
	4.4.1 アインシュタイン方程式の線形化 . . . . .	66
	4.4.2 重力場のゲージ自由度と線形重力波方程式 . . . . .	67
4.A	4章の補足 . . . . .	68
	4.A.1 アインシュタイン方程式の係数 $8\pi G$ の決定 . . . . .	68

4.A.2	測地線偏差方程式からのアインシュタイン方程式の”導出”	71
4.A.3	体積要素の幾何学的な定義	71
4.A.4	Lie 微分の幾何学的な定義	72
第 5 章	一般相対性理論の古典的テスト	79
5.1	球対称時空と Schwarzschild 解	79
5.1.1	球対称時空の線素	79
5.1.2	Birkoff の定理	80
5.1.3	Schwarzschild 解	82
5.1.4	Eddington-Robertson 展開	83
5.2	静的球対称時空における測地線方程式	84
5.3	静的球対称時空における運動：赤道面	85
5.3.1	時空の Killing ベクトルに付随する運動の定数 (保存量)	85
5.3.2	$r$ 方向の測地線方程式に付随する運動の定数	87
5.3.3	固有時と測地線パラメータの変換則	87
5.3.4	有効ポテンシャル	88
5.3.5	赤道面軌道の方程式 $r(\varphi)$	88
5.4	光の湾曲	88
5.5	水星の近日点移動	90
5.A	5 章の補足：時空の対称性の座標によらない定義	92
5.A.1	定常時空	92
5.A.2	静的時空	93
5.A.3	球対称時空	95
第 6 章	Schwarzschild ブラックホール	97
6.1	Schwarzschild 時空の構造	97
6.1.1	ブラックホール：Eddington-Finkelstein 座標	97
6.1.2	ホワイトホール	99
6.1.3	Kruskal diagram	100
6.2	ブラックホールまわりの軌道	102
6.2.1	粒子の軌道	104
6.2.2	光子の軌道	108
第 7 章	重力波	113
第 8 章	一般相対論的天体の構造	115
第 9 章	一般相対論的宇宙論	117
付録 A	連続体の力学からのテンソル概念の導入	119
A.1	歪みテンソル	119
A.1.1	ヘルムホルツ (Helmholtz) の基本定理	119
A.1.2	2 階のテンソルの座標基底による展開	121

A.2	応力テンソル . . . . .	121
A.2.1	応力ベクトルと応力テンソル . . . . .	121
A.2.2	応力テンソルの 2 通りの解釈 . . . . .	122
A.3	リーマンの曲率テンソル . . . . .	122
付録 B	テンソル解析の初歩 . . . . .	125
B.1	ベクトルの幾何学的定義 . . . . .	125
B.1.1	変位の変換則 . . . . .	125
B.1.2	ベクトルの幾何学的な定義：多変数関数の微分から . . . . .	126
B.1.3	ベクトルの「基底」の変換則 . . . . .	127
B.2	双対ベクトル . . . . .	128
B.2.1	双対ベクトルの「成分」とその変換則 . . . . .	129
B.2.2	双対ベクトルの「基底」とその変換則 . . . . .	130
B.3	テンソルの定義：双対ベクトルの拡張として . . . . .	131
B.3.1	(0,2) テンソル . . . . .	131
B.3.2	(2,0) テンソルおよび (1,1) テンソル . . . . .	132
B.4	計量テンソル . . . . .	132
B.4.1	内積と計量テンソル . . . . .	132
B.4.2	ベクトルから双対ベクトルへの写像としての計量テンソル . . . . .	133
B.4.3	内積操作と双対ベクトルの関係 . . . . .	134
B.4.4	計量テンソルの「逆」 . . . . .	134
B.4.5	2次元極座標系での計量テンソル . . . . .	135
B.5	共変微分とクリストッフェル (Christoffel) 記号 . . . . .	136
B.5.1	クリストッフェル記号 . . . . .	136
B.5.2	ベクトル場の共変微分 . . . . .	137
B.5.3	双対ベクトル場の共変微分 . . . . .	138
B.5.4	テンソル場の共変微分 . . . . .	139
B.6	クリストッフェル記号と計量テンソルの関係 . . . . .	139
B.6.1	クリストッフェル記号の対称性 . . . . .	139
B.6.2	計量テンソルの共変微分 . . . . .	140







## 参考文献

- Wald, R. M. (1984) "General Relativity" (University of Chicago Press)
- Shapiro, S. L. and Teukolsky, S. A. (1983) "Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars" (John Wiley & Sons)
- Hartle, J.B. (2003) "Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity" (Addison Wesley)
- D'Inverno, R. (1992) "Introducing Einstein's Relativity" (Oxford University Press)
- Weinberg, S. (1972) "Gravitation and Cosmology" (John Wiley & Sons)
- Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R. (1973) "The Large Scale Structure of Space-Time" (Cambridge University Press)
- 須藤靖 (2005) "一般相対論入門" (日本評論社)
- 須藤靖 (2010) "もう一つの一般相対論入門" (日本評論社)



## 第 1 章

# 重力と幾何学

一般相対性理論がその基礎におく重要な原理に”等価原理”がある。等価原理は”慣性力と重力の等価性”程度の認識しかなされないこともあるが、この等価原理こそ、重力が時空の幾何学として記述できることをアインシュタインに気づかせた重要な原理であり、アインシュタインをして”我が生涯における最も素晴らしい思いつき”と言わしめるに至ったのであろう。

本章では、等価原理を拠り所にして曲がった時空における測地線方程式を導く。測地線とは、2点間を結ぶ最短経路のことであるから、重力を受けて運動している質点の軌道が、曲がった時空における測地線になるということは、質点は、曲がった時空では力を受けていない自然な運動をしていることになる。すなわち、重力が時空の幾何学へと変身を遂げているのである。

### 1.1 等価原理

Newton の第二法則

$$m\mathbf{a} = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = m\mathbf{g} + \mathbf{F} \quad (1.1)$$

において\*1、座標変換

$$t' = t \quad (1.2)$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 \quad (1.3)$$

により、(一様)重力場の寄与を消すことができる。

$$m\frac{d^2\mathbf{x}'}{dt'^2} = \mathbf{F} \quad (1.4)$$

この当たり前に思われる議論では次の重要な仮定をしている。

- $m\mathbf{a}$  と  $m\mathbf{g}$  に現れる質量は同じ

すなわち、 $m\mathbf{a}$  に現れる質量は (1.4) 式から分かるように、一般の力が作用した際の加速され難さである。この意味で、慣性質量と呼ばれる (inertial mass:  $m^I$ )。一方、 $m\mathbf{g}$  に現れる質量は重力場  $\mathbf{g}$  に反応する度合いであり、受動重力質量と呼ばれる (passive gravitational mass:  $m^P$ )。慣性質量と受動重力質量の等価性が成り立てば、座標変換によって (一様) 重力場の寄与を消すことができる。

さらに注意深く考察すると、重力に関係する質量も、

---

\*1ここで  $\mathbf{F}$  は重力以外の力をあらわす。

- 「重力を作り出す質量」と「重力に反応する (重力を感じる) 質量」

の2種類が考えられることが分かるだろう。すなわち、重力場を作り出す質量を  $m^A$  とすると、(1.1) 式の右辺に表れる重力は

$$m^P \mathbf{g} = -m^P \nabla \phi = -m^P \nabla \left( -\frac{Gm^A}{r} \right) \quad (1.5)$$

で与えられる。この  $m^A$  を能動重力質量 (active gravitational mass) と呼ぶ。

慣性質量と受動重力質量の等価性は、古くは Galileo Galilei による有名なピサの斜塔での実験にはじまり、Loránd Eötvös によねじればかりを用いた精密測定を経て、現在では  $|m^I - m^P|/m^I \sim 10^{-12}$  の精度で両者は一致することが示されている\*2。受動重力質量と能動重力質量についても、月の内部組成が重心とずれていることを利用して、 $|m^A - m^P|/m^P \sim 10^{-12}$  の精度で両者は一致することが示されている\*3。すなわち、 $m^I = m^P = m^A$  が  $\sim 10^{-12}$  の精度で成り立っているのである。

もちろん一般には、(1.5) 式から分かるように重力場は一様ではないが、非一様性が (時間的にも) 無視できる十分小さい領域では変換 (1.2), (1.3) によって重力を消し去ることができる。実験的に確かめられている、質量の驚くべき精度での等価性に鑑み、これを原理へと昇華させよう\*4：

#### 等価原理

1. 加速度運動と重力場中の運動は局所的に等価であり、少なくとも局所的には重力を消し去った局所慣性系を定めることが可能である (弱い等価原理)。
2. 局所慣性系では特殊相対性理論が成り立つ (アインシュタインの等価原理)。

## 1.2 重力場中での質点の運動

### 1.2.1 局所慣性系 $\Rightarrow$ 一般座標系 (非局所慣性系)

質点の運動を局所慣性系で考えよう。等価原理より局所慣性系では重力は消し去られているので、質点の位置座標を  $\xi^\alpha$  とすると、運動方程式は

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (1.6)$$

となる。ここで  $d\tau$  は

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (1.7)$$

で定義される固有時である。また、上付き添字と下付き添字に同じものがある場合には、特段混乱の無い限り和をとるといふ、アインシュタインの和の規約を用いている\*5。

\*2 e.g. Roll, P. G., Krotkov, R., and Dicke R. H. (1964), "The Equivalence of Inertial and Passive Gravitational Mass", *Annals of Physics* **26**, 442

\*3 Bartlett, D. F. and Van Buren, D. (1986), "Equivalence of Active and Passive Gravitational Mass Using the Moon", *Physical Review Letters* **57**, 21

\*4 以下に述べる弱い等価原理は慣性質量と重力質量の等価性 (こちらを弱い等価原理と呼ぶのが普通である) からの帰結であり、アインシュタインの等価原理は「慣性系で特殊相対性理論が成り立つ」という要請を局所慣性系でに拡張したものである。これらに加えて、強い等価原理も存在するが、これは重力場が時空の幾何学に特有な量 (例えば計量テンソル) のみで記述されることを要請するものである。

\*5 以下でも用いる。

$\eta_{\alpha\beta}$  はミンコフスキー時空の計量 (の慣性系における成分) で、本講義ノートでは

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

のように符号を定める。

この運動を、非局所慣性系 (一般座標系)  $x^\mu$  で考えよう。座標変換  $\xi^\alpha(x^\mu)$  を行えばよいから、(1.6) 式は

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (1.9)$$

となるが\*6、ここで  $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$  を作用させると、

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda \quad (1.11)$$

であることに注意すれば\*7、

$$0 = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (1.13)$$

を得る。ここで

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (1.14)$$

と定義した。これが局所慣性系で自由運動する質点\*8を一般の非局所慣性系で記述した運動方程式である。

固有時の変換は

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.15)$$

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (1.16)$$

で与えられる。(1.15) 式は、非局所慣性系  $x^\mu$  における計量が  $\eta_{\mu\nu}$  ではなくて、 $g_{\mu\nu}$  となることを意味している。

### 1.2.2 一般座標系 (非局所慣性系) $\Rightarrow$ 局所慣性系

非慣性系 (一般座標系) は任意の加速度で運動している一般の観測者系である。等価原理より、これはそのような加速度をもたらす重力場中の運動に等価である。したがって、局所慣性系での運動方程式 (1.6) を

\*6 単純な多変数関数における変数変換である。つまり、 $\xi^i = (r, \theta)^T$ ,  $x^k = (x, y)^T$  として、

$$\frac{d\xi^i}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt} \quad (1.10)$$

と本質的に同じ。

\*7 これも多変数関数の微分の変数変換である。

$$\delta_\mu^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} x^\lambda(\xi^\alpha) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \quad (1.12)$$

\*8 すなわち、自由落下している質点

非慣性系で記述した (1.13) 式は、等価原理により、重力場中における質点の運動を表していると考えることができる。

逆に考えれば、重力場中で

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (1.17)$$

に従う質点の運動について、等価原理がその存在を保証する局所慣性系  $\xi^\alpha$  でそれを記述すれば、局所的に重力の効果を消すことができるので、自由落下運動

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (1.18)$$

になるということができる。

### 1.2.3 クリストッフエル記号

非局所慣性系における計量  $g_{\mu\nu}$  と  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  は次のように関係づけられる。 $g_{\mu\nu}$  を微分して、

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left( \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \right) = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (1.19)$$

一方、(1.14) 式  $\times \partial \xi^\beta / \partial x^\lambda$  より、

$$\frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda}. \quad (1.20)$$

(1.19) 式に (1.20) 式を代入して、

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}. \quad (1.21)$$

(1.21) 式 + (1.21) 式 ( $\mu \leftrightarrow \lambda$ ) - (1.21) 式 ( $\nu \leftrightarrow \lambda$ ) より、

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2g_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\mu} \quad (1.22)$$

を得る。ここで (1.16), (1.14) 式より、 $g_{\mu\nu}$  と  $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$  が添字  $\mu, \nu$  について対称であることを用いた。

ここで、 $g_{\mu\nu}$  (を行列とみなし、そ) の逆 (行列) を

$$g^{\nu\mu} g_{\mu\sigma} = \delta^\nu_\sigma \quad (1.23)$$

で定義する。すると、(1.22) 式  $\times g^{\nu\sigma}$  より、

————— クリストッフエル記号 (Christoffel symbol) —————

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) \quad (1.24)$$

を得る。これをクリストッフエル記号と呼ぶ。

## 1.3 幾何学としての重力と測地線

重力の幾何学化

さて、計量の変換 (1.16) 式の意味についてより詳しく調べよう。局所慣性系で時空線素は (1.7) 式より

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -d\tau^2 \quad (1.25)$$

であったものが、非慣性系で (1.16) 式となったのであるが、等価原理を用いてこれを逆に考えて、重力の存在により時空は歪められていて、時空線素はそもそも (1.16) 式のようになっていたのであるが、局所慣性系をとったがゆえに Minkowski 時空の計量 (1.7) になった、と考えよう。この観点では、 $g_{\mu\nu}$  を座標変換による便宜上のものと考えのではなく、重力の幾何学的表現であると考え。すなわち

—— 重力と計量 ——

時空計量  $g_{\alpha\beta}$  が重力の幾何学的表現を与える。

### 重力場中の粒子の運動と測地線

次に、(1.17) 式について再び考えよう。重力が存在しない場合には、粒子は直線、すなわち最短経路を進んだ。実際、特殊相対性理論における自由粒子の運動は時空経路に関する変分原理から導くことができる。重力によって歪められた時空における運動は一般に直線ではないが、最短経路を進むという原理は変わらないとして粒子の運動を変分原理から求めてみよう。

固有時  $d\tau$  とは異なるパラメータ (時間刻み)  $dp$  で粒子の軌跡をあらわせば、

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp}} dp \quad (1.26)$$

であるから、その変分を取れば

$$\begin{aligned} \delta\tau_{AB} &= - \int_A^B \frac{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} + 2g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp}}{2\sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp}}} dp \\ &= - \int_A^B \left[ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + 2g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] \frac{1}{2} \frac{d\tau}{dp} dp \\ &= - \int_A^B \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right] d\tau \\ &= - \int_A^B \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} - g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \right] \delta x^\lambda d\tau \\ &= - \int_A^B \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} - g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \right] \delta x^\lambda d\tau \\ &= - \int_A^B \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right) - g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} \right] \delta x^\lambda d\tau \\ &= \int_A^B \left[ g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right] \delta x^\lambda d\tau \\ &= \int_A^B \left[ g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \delta_\lambda^\rho \left( \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right] \delta x^\lambda d\tau \\ &= \int_A^B \left[ g_{\lambda\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (g_{\lambda\nu} g^{\nu\rho}) \left( \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\rho} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right] \delta x^\lambda d\tau \\ &= \int_A^B \left[ \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right] g_{\lambda\nu} \delta x^\lambda d\tau. \quad (1.27) \end{aligned}$$

となる。ここで、2 番目の等号を導く際に、分母が  $2d\tau/dp$  に等しいことを用い、4 番目の等号では部分積分を行っている。

したがって、(1.17) 式と (1.24) 式が成り立っていれば粒子の軌道は最短経路となる。逆に、粒子が最短軌道を通るという原理から (1.17) 式と (1.24) 式が導かれる。よって、

—— 粒子の運動方程式と測地線 ——

粒子は固有時を最小化する軌道を動き、その軌道を測地線と呼ぶ。

測地線の軌道を与える (1.17) 式を測地線方程式と呼ぶ。解析力学で学んだオイラーラグランジュ方程式

$$-\frac{d}{dp} \left( \frac{\partial L}{\partial(dx^\alpha/dp)} \right) + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (1.28)$$

を用いれば、ラグランジアン

$$L = mc^2 \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp}} \quad (1.29)$$

に対するオイラーラグランジュ方程式として導くこともできるが、今後の応用<sup>\*9</sup>を考えれば (1.27) 式のような直接的な変分計算ができるようになっておくことが望ましい。

質点が計量  $g_{\mu\nu}$  が記述する曲がった時空の最短距離を進むということは、この曲がった時空では、その質点は力を受けていないということになる。この意味で、重力の効果は時空の幾何学にすべて昇華されている。

つまり、例えば太陽による万有引力は、太陽の重力が物体を引きつけるのではなく、太陽の存在によって時空が歪んでいるため、その歪んだ時空での「自然な」運動が、太陽へと向かう運動になっていると解釈されるのである。同様に、ブラックホールの近くを通る光線が曲げられるのは、ブラックホールが光を引きつけたからではなく、ブラックホール時空で光子が自然な運動を行った結果である。

## 1 章の問題

1. 等価原理から「重力の幾何学化」を帰結する論理の流れを説明せよ。
2. (1.27) 式の式変形はかなり詳細に記述してある。各段でどのような変形がされているかを説明せよ。
3. 特殊相対性理論における Maxwell 方程式は、Maxwell テンソル  $F^{ab}$  と 4 元電流  $\mathcal{J}^a$  を用いて<sup>\*10</sup>、

$$\partial_b F^{ab} = 4\pi \mathcal{J}^a \quad (1.30)$$

$$\epsilon^{abcd} \partial_a F_{bc} = 0 \quad (1.31)$$

で与えられる<sup>\*11</sup>。

<sup>\*9</sup> 一般相対論だけでなく場の理論などにおいても。

<sup>\*10</sup> この問題では光速  $c = 1$  の単位系を用いる。この問題で必要となるテンソルの初等的知識については Appendix B を参照のこと。

<sup>\*11</sup> ここで  $\epsilon_{abcd}$  は

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & (\alpha\beta\gamma\delta \text{ が } 0123 \text{ の偶置換}) \\ -1 & (\alpha\beta\gamma\delta \text{ が } 0123 \text{ の奇置換}) \end{cases} \quad (1.32)$$

を成分に持つ完全反対称テンソルである。添字は Minkowski 計量で上げ下げされるので、時間成分の添字の取り扱いには注意すること。例えば、

$$\epsilon^0_{\alpha\beta\gamma} = \eta^{0\mu} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} = \eta^{00} \epsilon_{0\alpha\beta\gamma} = -\epsilon_{0\alpha\beta\gamma} \quad (1.33)$$

である。



(a)  $F_{ab}$  は反対称テンソルである。その独立成分が 6 個であることを示せ。これは電場と磁場の単純な自由度の合計と同じである<sup>\*12</sup>。

(b) (1.30) 式より次の電荷保存則を導け。

$$\partial_a \mathcal{J}^a = 0 \quad (1.34)$$

(c) (1.31) 式は、ベクトルポテンシャル  $A^b$  を用いて、

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a \quad (1.35)$$

とすることで自動的に満たされることを示せ。さらに、 $F_{ab}$  は (1.30), (1.31) 式は、ゲージ変換

$$A_a \longrightarrow A_a + \partial_a \chi \quad (1.36)$$

によって不変であることを示せ<sup>\*13</sup>。

(d) ゲージ自由度 (1.36) を用いて、ローレンス (Lorenz) ゲージ条件

$$\partial_a A^a = 0 \quad (1.37)$$

を課することができることを示せ。このゲージ条件の下で、Maxwell 方程式 (1.30) は

$$\partial^a \partial_a A_b = -4\pi \mathcal{J}_b \quad (1.38)$$

となることを示せ<sup>\*14</sup>。

(e) 真空中 ( $\mathcal{J}^b = 0$ ) を一定の振幅で伝わる電磁波

$$A_b = C_b e^{i\Phi} \quad (1.39)$$

を考える。ここで  $C_b$  は定ベクトル、 $\Phi$  は電磁波の位相である。(1.38) 式より、

$$\partial^a \partial_a \Phi = 0, \quad (\partial^a \Phi)(\partial_a \Phi) = 0 \quad (1.40)$$

を示せ。この結果より、等位相面に垂直なベクトル  $k^a = \partial^a \Phi$  は<sup>\*15</sup>ヌルベクトルであることが分かる。

$$k^a k_a = (\partial^a \Phi)(\partial_a \Phi) = 0 \quad (1.42)$$

(f) (1.42) 式をさらに微分し、偏微分が交換可能であることを用いることで、

$$k^a \partial_a k_b = 0 \quad (1.43)$$

を示せ。すなわち、 $k^a$  は測地線方程式に従う。つまり、特殊相対性理論において、真空中を伝わる電磁波の等位相面<sup>\*16</sup>は、ヌル測地線に沿って伝わる。

<sup>\*12</sup>実際にはガウスの法則  $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e$  とモノポール無し条件  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  の拘束条件があるため、真の自由度は 4 である。電磁場がスカラーポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $\vec{A}$  で記述されたことを思い出そう。

<sup>\*13</sup>電磁場を記述する物理的な場は  $F_{ab}$ (あるいは  $A_a$ ) であるため、Maxwell 理論にはゲージ変換 (1.36) の下での対称性 (ゲージ自由度) がある。

<sup>\*14</sup>ベクトルポテンシャルは、その定義 (1.35) から分かるように、観測者の 4 元速度に依存することなく定義されている。

<sup>\*15</sup>一般に、任意の曲面はある関数の等高面  $f(x^a) = 0$  で表すことができる。曲面に沿った変化  $(\delta x)^a$  に対しては  $\delta f = 0$  であるから、

$$\delta f = (\partial_a f)(\delta x)^a = 0 \quad (1.41)$$

である。これより  $\partial^a \perp (\delta x)^a$  であることが分かる。ベクトル  $(\delta x)^a$  は  $f$  の等高面の接ベクトルであるから、これは、 $\partial^a f$  が曲面の法線ベクトルであることを示している。

<sup>\*16</sup> $k^a$  は要するに波数 4 元ベクトルと呼ばれるものである。



## 第2章

# 一般相対性理論の数学とテンソル解析

一般相対性理論において、等価原理と並ぶもう一つの原理として、物理法則が観測者によらないことを要請する「一般相対性原理」(2.1節参照)がある。しかしながら、後に判明することであるが、測地線方程式にあらわれる  $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$  は、座標変換にたいして共变的ではないなど、その数学的記述は満足のものではない。そこで、観測者によらないこと(座標系によらないこと)が自然に保証される数学が一般相対性原理を満たすために必要となる。それが曲がった空間におけるテンソル解析である。

この章では、一般相対性理論の数学的基礎として必要な曲がった空間の幾何学とテンソル解析について、(座標系に依らない)現代的な微分幾何学の観点からまとめる。座標系やベクトルの座標をより全面に出した流儀におけるテンソル解析の初等的な解説については Appendix B を参照のこと。

## 2.1 一般相対性原理及び一般共変性原理とテンソル場

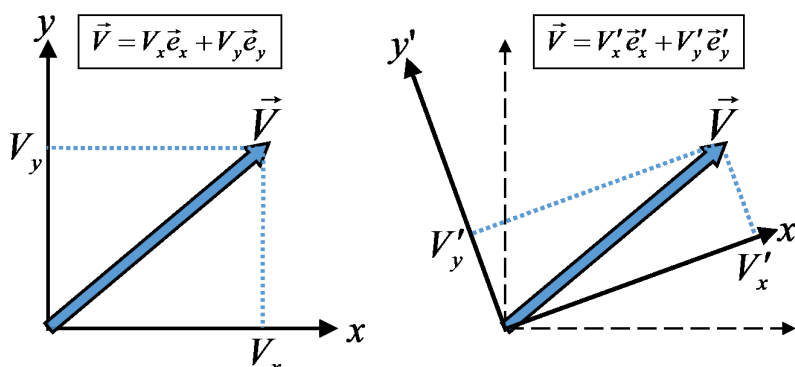
一般相対性理論における等価原理と並ぶもう一つの原理として、次の一般相対性原理 (Principle of general relativity) を採用しよう:

一般相対性原理

すべての観測者は等価である。

これは特殊相対性理論における慣性系の等価性を拡張したものである。1.3節でも触れたように、この原理を数学的にすっきりと表すためには幾何学的な記述が必要である<sup>\*1</sup> 一般相対性原理を達成するために、次

<sup>\*1</sup>ここでは直感的な理解を助ける目的で、以下の注意を与えておこう。テンソル(ベクトルも含む)そのものは幾何学的な実体であり、座標概念とは独立に存在する。座標系(観測者)によってその表現の仕方、すなわち座標成分が異なるだけである(ベクトルの場合の幾何学的普遍性については下図参照)。



ベクトルの幾何学的普遍性: ベクトル  $\vec{V}$  は幾何学的実体であり座標変換で不変。その成分(基底による表現)が変化するのみ。

の一般共変性原理 (Principle of general covariance) を採用しよう:

— 一般共変性原理 —

物理法則にあらわれる方程式はテンソル式で記述される。

実際、物理法則がテンソル式で記述されていれば<sup>\*2</sup>、テンソルの成分 (= 観測者が知る物理法則のかたち) の変換則 (2.59) 式と、2.8.1 節、2.A.1 節で説明される共変微分のテンソル性から、物理法則は観測者に依らないやり方で定式化できる<sup>\*3</sup>。

例えば、物理法則が次のようなテンソル式で表されていたとしよう。

$$\nabla_a H^a_{bc} = F_{bc} \quad (2.1)$$

テンソルの成分の変換則 (2.59) 式より、 $x^\mu \rightarrow x'^{\mu'}$  の変換に対し、その成分は

$$\nabla_\alpha H^\alpha_{\beta\sigma} - F_{\beta\sigma} = 0 \implies \nabla_{\alpha'} H'^{\alpha'}_{\beta'\sigma'} - F'_{\beta'\sigma'} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\sigma'}} [\nabla_\alpha H^\alpha_{\beta\sigma} - F_{\beta\sigma}] = 0 \quad (2.2)$$

と変換する (2.59 式参照)。すなわち、 $x^\mu$  系で成り立つ物理法則は、 $x'^{\mu'}$  系でも必ず成り立つ。すなわち、2 つの座標系はこの意味において等価である<sup>\*4</sup>。

## 2.2 曲がった時空の準備的考察

1 章で説明したように、等価原理からの帰結として、重力場は曲がった時空の幾何学的構造 (つまり時空計量) として解釈されることになった。そして、一般相対性原理を満たすべく、物理法則は曲がった時空上のテンソル方程式で与えられる必要がある。

物理法則には一般に微分演算子があらわれるが、微分を定義するためには異なる時空点におけるテンソルを比較する (差分をとる) 必要がある。より具体的には、比較のためにテンソルの平行移動を行う必要がある<sup>\*5</sup>。ここで、ユークリッド空間やミンコフスキー時空のような平坦な空間の場合には、ベクトルやテンソルの平行移動は自明に行われる。しかし、空間が曲がっている場合には「比較の仕方 (平行移動の仕方)」を与える必要がある。

例として 2 次元球面におけるベクトルの平行移動を考えよう (図 2.1 参照)。赤道面の一点に北極向きのベクトルを取ったとき、それを 2 次元球面内部で (球面に沿って) 北極まで平行移動させれば (図 2.1 の赤ベクトル)、そのベクトルは北極において図 2.1 の黒ベクトルようになる。

しかし、赤道面の一点で与えた赤ベクトルを 2 次元球面ではなく、3 次元ユークリッド空間のベクトルであると考えると北極の位置まで平行移動させれば、それは上向きのベクトルのままである。

<sup>\*2</sup>より精確には「物理法則が観測者に固有の物理量を含まないテンソル式で記述されていれば」とするべきである。この但し書きが重要となる典型例は Maxwell 方程式である。電磁場の自由度として本質的なのは Maxwell テンソル  $F^{ab}$  であり、観測者ベクトル  $u^a$  を導入してはじめて、( $F^{ab}$  を分解する形で) その観測者にとっての電場  $E^a$  および 磁場  $B^a$  が定義される。ここで、 $E^a$  と  $B^a$  で表現された Maxwell 方程式も「テンソル式」といえないこともないが、観測者ベクトル  $u^a$  が導入されてしまっているという点で、一般相対性原理を満たすために必要な一般共変性原理を満たすテンソル式と考えるわけにはいかないのである。(2 章の演習問題 5、参照)

<sup>\*3</sup>やや乱暴だが、これは円錐 (物理法則) を考えた場合に、幾何学的な記述 (テンソルによる記述) を用いれば、観測者 (座標) に依存した表現に頼ることなく、円錐 (物理法則) を円錐そのもの (物理法則そのもの) として記述できることに例えられる。そうではあっても、円錐を真下から見る観測者はそれを円だと考え、真横から見る観測者は三角形であると考え。しかし、それは見方の違いであって、円錐そのものが変わっているわけではない。

<sup>\*4</sup>特異 (singular) な変換となる時空点を含まない領域における座標変換に対して等価性が成り立つ。ここで、得意な変換とは変換行列  $\partial x^\alpha / \partial x'^{\alpha'}$  の行列式がゼロになったり発散したりするような変換である。

<sup>\*5</sup>ベクトルを比較するためには始点を合わせる必要があったことを思い出そう。

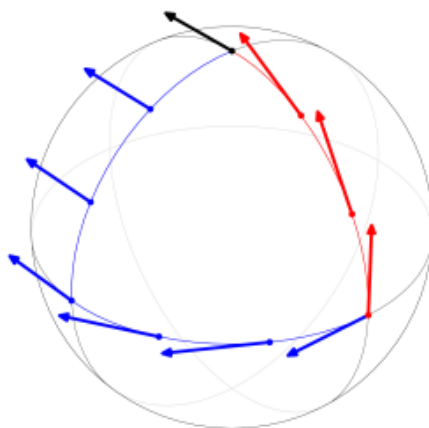


図 2.1 球面における平行移動の模式図

このように、曲がった空間において異なる点におけるベクトルを比較するためには、その平行移動の仕方(上の例の場合には経路)を与える必要があるのである。

ここで挙げた 2 次元球面の場合、平行移動の仕方そのものは直感的に明らかに思われるかもしれない。その主な理由として、

1. 2 次元球面が単純であること
2. 3 次元空間に棲む我々からすると 2 次元球面を「外から」見ることができること

が挙げられる。しかし、一般相対性理論にあらわれる時空は 2 次元球面のように単純なものばかりではないし、ましてや、一般相対性理論の舞台である 4 次元時空は、一般相対性理論の枠組みではこの宇宙の全てであり\*6、外部から眺めることができるような代物ではない。

そこで、時空の内部にいながらにして、異なる点におけるテンソルを比較する方法が必要になる。実は、1 章で登場したクリストッフェル記号は、その方法を与える幾何学的構造の 1 つである。そして、測地線方程式は、「クリストッフェル記号による方法」にしたがって、任意のベクトルをそれ自身の方向に平行移動していった場合に描かれる、(この意味で真っ直ぐな) 粒子の軌跡を与えるものになっている。

異なる点におけるテンソルの比較の仕方を与える幾何学構造はクリストッフェル記号に限らない。そこで、以下では曲がった時空における平行移動の定義と、一般共変性原理を満たすために必要なテンソル解析の初歩について、やや現代的な視点から解説する\*7。

## 2.3 数学的準備

本章の主目的は上述の内容を理解するとともに、テンソル解析の初歩について学ぶことである。この節では、そのために必要な最低限度の数学について、厳密性にあまりこだわりすぎずにまとめる\*8。

\*6 高次元時空を考えたとしてもその高次元時空が宇宙の全てである。

\*7 一般相対性理論では結局のところクリストッフェル記号が採用されることになるのだが、重力理論の幾何学化について、一般相対性理論の拡張を考える場合には、以下に与える説明もひょっとすると少しは役に立つかもしれない。

\*8 本講義ノートでは、一般相対性理論を学ぶ上で障壁となる「多様体」や「接空間」などの概念を意図的に避けて議論を進める。これらの事項を含め、しっかりとした数学的土台を導入した「時空多様体」の取り扱いについては、Wald, R. M. (1984) "General Relativity" の 2 章を参照せよ。

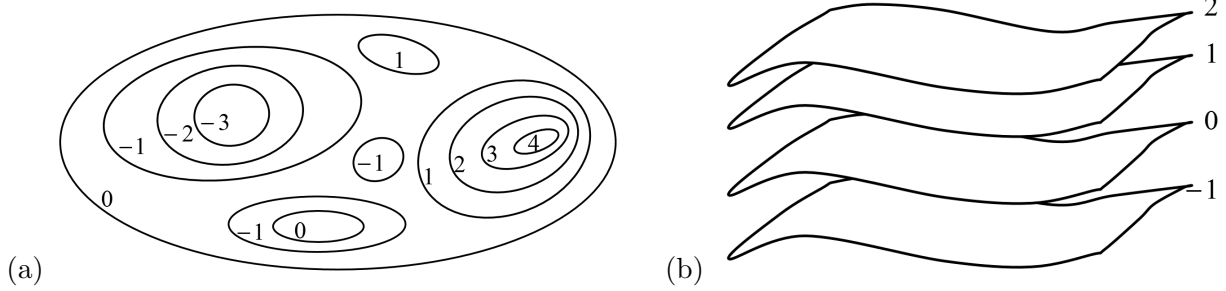


図 2.2 スカラー場の視覚的模式図：(a) 1次元等高線 および (b) 2次元等値面

### 座標系

座標系  $\{x^\mu\}$  とは<sup>\*9</sup>、時空の点から 4 つの実数の組 (座標値) への写像のことである<sup>\*10</sup>。

$$x^\mu : P \in \mathcal{M} \mapsto x^\mu(P) \in \mathbb{R}^4. \quad (2.3)$$

このことを単純に時空上の点  $P$  の座標値は  $x^\mu(P)$  であるとか、より簡便に時空点  $P$  が座標値  $x^\mu$  を持つことを  $P(x^\mu)$  と表したりする。時空上の点  $P$  は幾何学的実体であるが、その座標値は座標系に依存することに注意しよう。

### スカラー場

(時空) 点を 1 つ決めると 1 つスカラー値を返す：

$$f : P \in \mathcal{M} \mapsto f(P) \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

(これはスカラーであることの定義そのものであるが) スカラー場が返す値は座標系によらない。直感的には 2次元では等高線、3次元では等値面を構成するものと考えてよい (2.2 参照)。すなわち、等高線や等値面は座標とは無関係に存在する幾何学的実体であり、その表し方が座標によるということである。

座標系を導入してスカラー場を記述する場合には、

$$f(P) = f(P(x^\mu)) = f(x^\mu) \quad (2.5)$$

のように表される。

### 曲線

曲線とは、1 つパラメータ  $s$  を決めると時空上の点を返す写像  $C$  で与えられる時空の部分集合  $\mathcal{C}$  のことである (図 2.3 参照)。

$$C : s \in \mathbb{R} \mapsto (P \in \mathcal{M}) = (P(s) \in \mathcal{C}). \quad (2.6)$$

上の定義には座標が介在していないことからもわかるとおり、曲線は幾何学的に定式化されており、パラメータの付け方の自由度はあるが、座標系の選び方にはよらない<sup>\*11</sup>。

<sup>\*9</sup> 数学的には座標値は数字の 4 つ組なので、 $\{x^\mu\}$  のように括弧付きで記述するのがよいが、以下では面倒なのでシンプルに  $x^\mu$  と表すことにする。

<sup>\*10</sup> あらっぽく言ってしまうと、「うまく」座標系を導入することのできるような集合が「多様体」である。時空には「うまく」座標系が導入できるとしているため、「時空多様体」などと呼ばれることも多い。

<sup>\*11</sup> パラメータ付け方の自由度の詳細については割愛する。

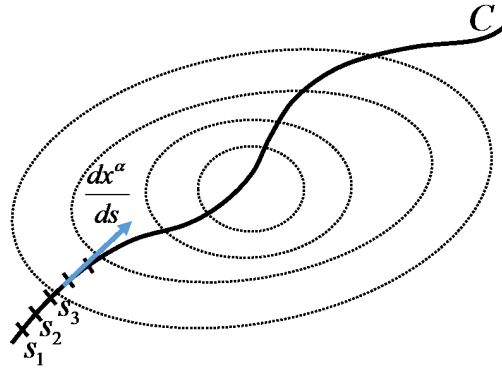


図 2.3 曲線と方向微分

座標系を導入すれば、曲線とは、パラメータ  $s$  を与えると  $P(s)$  の座標値  $x^\mu(s)$  を返す操作

$$C : s \mapsto x^\mu(s) \quad (2.7)$$

とみなすこともできる。これは曲線の媒介変数表示にほかならない。

## 2.4 方向微分とベクトル

スカラー場と曲線が座標系に依らない数学的道具であることに着目し、これらを用いてベクトルを幾何学的に(座標に依らない形で)定義する。

### 2.4.1 ベクトルの幾何学的な定義

時空点  $P$  におけるスカラー場  $f$  の曲線  $C$  に沿った微分(方向微分)を考える。

$$\left. \frac{df}{ds} \right|_P = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{f(P(s+\epsilon)) - f(P(s))}{\epsilon} \right] \quad (2.8)$$

まず、座標  $x^\mu$  があらわれていないので、方向微分は座標に依存しない形で定義されていることに注意しよう。現代的な微分幾何学では、ベクトルをそれと等価な方向微分(接ベクトル)と同一視する<sup>\*12</sup>。

$$v^a|_P(f) \equiv v|_P(f) \longleftrightarrow \left. \frac{df}{ds} \right|_P \quad (2.10)$$

以下では時空点  $P$  で評価していることをあらわす添字  $P$  を省略する。

すなわち、時空点  $P$  におけるベクトルは、関数  $f$  を実数  $v|_P(f)$  に移す写像

$$v^a \in V_P : f \in \mathcal{F} \mapsto v^a(f) = \frac{df}{ds} \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

として定義される。

曲線<sup>\*13</sup>を与えるとその方向微分が定まり、その曲線に対応するベクトルが幾何学的に定義される。逆に、任意のベクトルに対して、それに対応する曲線が少なくとも局所的には存在することが証明できる。局所的

<sup>\*12</sup> すなわち、幾何学的ベクトルが備えるべき「大きさ」と「方向」の属性を方向微分が持つことを利用して、方向微分をベクトルへと格上げしている：

$$\frac{df}{ds} \longleftrightarrow \left( \frac{d}{ds} \right)^a f \quad (2.9)$$

<sup>\*13</sup> 曲線も座標系に依らない幾何学的実体であることをもう一度注意しておく。

に成り立つこの性質をつなぎ合わせていくことで、ベクトルと曲線の方向微分の対応付けが正当化される。すなわち、

ベクトルの幾何学的表現

任意のベクトルについて曲線の局所方向微分が対応し、それがベクトルの幾何学的表現を与える。

ここで、上述のベクトルの定義において、本質的に重要なのは(曲線  $C$  の)方向微分と(接)ベクトルの対応

$$v^a \longleftrightarrow \left( \frac{d}{ds} \right)^a \quad (2.12)$$

であり、スカラー場  $f$  は副次的な役割を果たしているに過ぎないことに注意しよう(ベクトルの座標表現(2.14)の解説も参照)<sup>\*14</sup>。このベクトルの対応付けを時空の各点(の任意の近傍)で行えば、ベクトルを幾何学的に定義することができる<sup>\*15</sup>。

記法についての注意(1)

本講義ノートでは、ベクトル(場)  $v$  には<sup>\*16</sup>上付きの「アルファベット」の添字をつけて  $(v^a)$ 、それがベクトルであることを示すことと約束する。一方、これまで使ってきた「ギリシャ文字」の添字は「ベクトルの成分」を表すために用いる。

## 2.4.2 ベクトルの座標表現

幾何学的なベクトルの定義がこれで与えられたことになるので<sup>\*17</sup>、座標系  $x^\mu$  を導入して具体的に調べることにしよう。このとき、

$$v^a(f) \longleftrightarrow \left( \frac{d}{ds} \right)^a (f) = \frac{dx^\mu}{ds} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a (f) = \frac{dx^\mu}{ds} (\partial_\mu)^a (f) \quad (2.13)$$

<sup>\*14</sup> 一見するとスカラー場の勾配でベクトルを定義したように思われるかもしれないが(この場合は回転(rotation)がゼロのベクトル場しか記述できない)、そうではなく、方向微分によってベクトルを定義しているので、任意のベクトル(任意の局所的なベクトル場)を表現することができる。

<sup>\*15</sup> なぜこのような定義が必要かという、座標系に依らないということが一般相対性理論では大変重要視されるからである。その理由の一つとして、座標の選び方による見かけ上の特異点(座標特異点)があり得ることが挙げられる。平坦な2次元空間を極座標で考える。

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

ここで、 $r = a^2/\xi$  なる変換を行うと、線素(計量)は

$$ds^2 = \frac{a^4}{\xi^4} (d\xi^2 + \xi^2 d\theta^2)$$

となり、 $\xi = 0$  で計量が発散している。もちろん、もともとは平坦な時空だったのだから、この特異点はよくない座標系  $(\xi, \theta)$  を張ったことによるものである。平坦な時空の場合にはこれでよいが、一般相対性理論では、前もって曲がり具合を知ることのできない一般の時空を取り扱い、物理的な特異点を含むブラックホール時空も取り扱う。そのときに、「その特異点は座標特異点で、こちらの特異点は物理的な特異点である」というような区別をどのようにつければよいだろうか? 座標系に依拠した特異点の定義を用いると、そのような区別は大変困難になる。また、そもそも曲がった時空で「ベクトルの座標基底」をどのように導入すればよいだろうか? 平坦な時空では、自然に(直感的に)座標系とそれに付随したベクトルの座標基底が定義できたが、例えばブラックホール時空でもそれが可能であろうか? このような自問自答の末、一般相対性理論(あるいは微分幾何学や多様体論などの数学)では「座標系に依らない定義」というものを重要視することになり、その構築に大きな労力を費やすことになったのである(その分、数学は難しくなってしまう)。

<sup>\*16</sup> 実際には、ベクトルに限らず、任意のテンソルのランクを「アルファベット」の添字を用いて表すことになる。

<sup>\*17</sup> なんだか騙されたような印象を受けた学生も多いと思うが、これはそういうものとして割り切って先に進んでほしい。



となる。ここでスカラー場  $f$  に作用するのはベクトルであるため、上付き添字  $a$  を加えて  $\partial_\mu f$  を明示的に  $(\partial_\mu)^a(f)$  と表した。

$f$  は任意であるので、これより、

$$v^a = \frac{dx^\mu}{ds} (\partial_\mu)^a \equiv v^\mu (\partial_\mu)^a \quad (2.14)$$

となると結論付けられる。ここで

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad (2.15)$$

は座標系  $x^\mu$  におけるベクトルの成分である。

記法についての注意 (2)

本講義ノートでは<sup>\*18</sup>、ある座標系における「ベクトルの成分」は「ギリシャ文字」の「上付き」添字を用いて表すことと約束する。一方、座標系  $x^\mu$  におけるベクトルの座標基底は  $(\partial_\mu)^a$  である<sup>\*19</sup>。

### 2.4.3 ベクトルの変換則

幾何学的にベクトルを定義したことの恩恵として、ベクトルの基底や成分の変換則が自動的に満たされる。まず、ベクトルの座標基底については、偏微分のチェインルールから

$$(\partial_{\mu'})^a = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} (\partial_\mu)^a \quad (2.16)$$

となる。

また、幾何学的にベクトルを定義したことの恩恵として、座標変換によって幾何学的実体であるベクトル  $v^a$  そのものは不変であり、その表現が異なるだけであることは、自動的に保証されている。したがって、2つの座標系  $x^\mu, x'^{\mu'}$  でベクトル  $v^a$  を表した

$$v^a = v'^{\mu'} (\partial_{\mu'})^a = v^\mu (\partial_\mu)^a \stackrel{(2.16)}{=} v^\mu \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} (\partial_{\mu'})^a \quad (2.17)$$

より、ベクトルの成分は座標変換によって

$$v'^{\mu'} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} v^\mu \quad (2.18)$$

のように変換することがわかる。これらの変換則は Appendix B の結果と同一である。

通常のベクトルの座標基底を用いた表式との整合性

現代的な微分幾何学では「ベクトルの座標基底」より先に「座標系」が導入されるため、ベクトルの座標基底が  $(\partial_\mu)^a$  のような見慣れない形で登場しているが<sup>\*20</sup>、この表現は通常のテンソル解析よりも応用がしやすく、また整合的である<sup>\*21</sup>。例えば、2次元極座標の場合、

$$(\partial_r)^a(f) = \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial y} = \cos \theta (\partial_x)^a(f) + \sin \theta (\partial_y)^a(f) \quad (2.19)$$

$$(\partial_\theta)^a(f) = \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial y} = -r \sin \theta (\partial_x)^a(f) + r \cos \theta (\partial_y)^a(f) \quad (2.20)$$

<sup>\*18</sup> 広く一般相対性理論の文献で採用されているように。

<sup>\*19</sup> 4次元時空における「ベクトルの座標基底」はベクトルの4つ組なので  $\{(\partial_\mu)^a\}$  のように書くべきであるが、これもこのように略記する。

<sup>\*20</sup> よくよく考えてみると、基底ベクトルを  $(e_\mu)^a$  と表す記法だって単に慣れているから自然に思えるのだけなのであろう。

<sup>\*21</sup> これよりも少しだけ現代的でない、ベクトルの座標基底を主眼においた観点からのテンソル解析については、Appendix B 参照のこと。

となるが、これは Appendix B の結果

$$\mathbf{e}_r = \Lambda_r^x \mathbf{e}_x + \Lambda_r^y \mathbf{e}_y = \frac{\partial x}{\partial r} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \mathbf{e}_y = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (2.21)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \Lambda_\theta^x \mathbf{e}_x + \Lambda_\theta^y \mathbf{e}_y = \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{e}_y = -r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y \quad (2.22)$$

において  $(\partial_r)^a \leftrightarrow \mathbf{e}_r$ ,  $(\partial_\theta)^a \leftrightarrow \mathbf{e}_\theta$  と同一視したものと同等である。

#### 2.4.4 4元速度ベクトル

有限の質量を持つ粒子の4元速度

粒子 (質量を  $m \neq 0$  とする) の4元速度ベクトル  $u^a$  は、粒子の世界線を曲線  $C$  に選び、世界線を固有時  $\tau$  でパラメータ付けした場合のベクトルとして定義される。したがって、粒子の位置座標を  $x^\alpha$  とすれば、

$$u^a = \frac{dx^\alpha}{d\tau} (\partial_\alpha)^a \quad (2.23)$$

である。成分が  $dx^\alpha/d\tau$  となることから、

$$u^a = \frac{dx^a}{d\tau} \quad (2.24)$$

のように表記することも多い。

計量テンソルの導入を先取りした解説

その質量や種類、3次元速度に依らず、粒子の4元速度は

$$g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = -1 \quad (2.25)$$

より、

$$g_{ab} u^a u^b = -1 \quad (2.26)$$

を満たす。

ゼロ質量の粒子の4元速度

光子 (などゼロ質量の粒子) の場合には、その固有時は0なので、光子の世界線を固有時でパラメータ付けすることはできない。そこで、光子の世界線はアフィンパラメータと呼ばれる変数でパラメータ付けする。ここでアフィンパラメータとは、光子が測地線を進む場合にそれが測地線方程式に従うようなパラメータ付けのことである。光子の4元速度を  $k^a$  とすると、

$$g_{ab} k^a k^b = 0 \quad (2.27)$$

であり、 $k^a$  はヌルベクトルである。

#### 2.4.5 微小変位ベクトル

平坦な時空の場合と異なり、曲がった時空では時空上の2点  $A, B$  を結ぶ変位ベクトルを (その時空からはみ出ることなく) 定義することは一般にできない\*22。しかし、2点間の距離が微小 (無限小) である場合

\*22例えば地球表面 (2次元球面) の場合、赤道上の点  $A$  と北極点  $B$  を結ぶベクトルは、3次元的に見れば地球表面 (時空) からはみ出して地球内部 (異次元時空) を貫通することになる。しかしながら、2次元の地球表面に話を限れば、地球表面が世界のすべてであり、貫通するための3次元方向は存在しない。

には、 $A, B$  を結ぶ微小 (無限小) 変位ベクトルを定義することができる<sup>\*23</sup>。具体的には、微小変位ベクトルを  $(dl)^a$  と表すと、スカラー場  $f$  への作用が

$$(dl)^a(f) \equiv f(B) - f(A) \quad (2.28)$$

であるとすることによって定義される。

微小変位ベクトルの定義 (2.28) はベクトルの定義 (2.8), (2.10) と整合的である。 $A, B$  間を結ぶ曲線  $C$  を考えて<sup>\*24</sup>、 $A = P(s)$ 、 $Q = P(s + ds)$  とパラメータ付けする。 $A, B$  間の距離が無微小であることにより、

$$(dl)^a(f) = f(B) - f(A) = f(P(s + ds)) - f(P(s)) = \frac{df}{ds} ds = ds v^a(f) \quad (2.29)$$

となっている。 $f$  は任意であったから、

$$(dl)^a = v^a ds \quad (2.30)$$

であり、これは通常の関係式である。

座標系  $x^\mu$  を導入して  $A = P(x^\mu)$ 、 $B = P(x^\mu + dx^\mu)$  とすれば、(2.13) 式より、

$$(dl)^a(f) = ds v^a(f) = dx^\mu (\partial_\mu)^a(f) = dx^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \quad (2.31)$$

である。一方 (2.28) 式からは、

$$(dl)^a(f) = f(P(x^\mu + dx^\mu)) - f(P(x^\mu)) = df = dx^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \quad (2.32)$$

となるのでやはり整合的である。

## 2.5 双対ベクトル

### 2.5.1 双対ベクトルの定義

テンソルを定義するための準備として、双対ベクトルという概念を導入しておく<sup>\*25</sup>。ここでは詳しくは述べないが、双対ベクトル空間 ( $V^*$ ) は、ベクトル空間  $V$  を考えると自然に (必ず) 導入されるもうひとつのベクトル空間であり、文字通りベクトルの双対 (dual, 双子) のようなものである<sup>\*26</sup>。

本講義ノートでは、双対ベクトルは下付きのアルファベットの添字を 1 つ持つものとして表すと約束する。これに対応して、双対ベクトル  $\omega_a$  のある座標系  $x^\mu$  における成分は、下付きのギリシャ文字の添字を用いて  $\omega_\mu$  と表されることになる。

<sup>\*23</sup> より数学的に述べると、微小変位ベクトルは時空  $\mathcal{M}$  の点  $P$  における接空間  $T_P(\mathcal{M})$  上のベクトルとなっている。実は、微小変位ベクトルに限らず、(曲がった) 時空におけるある点  $P$  のベクトルは、その点での接空間  $T_P(\mathcal{M})$  上のベクトルである。したがって、 $P$  とは異なる点  $Q$  のベクトルは別の接空間  $T_Q(\mathcal{M})$  上のベクトルであるから、住んでいる空間が異なることになる。この事実は、ベクトルの微分を考える際に問題となる。なぜならば、点  $P$  においてベクトルの「微分」を定義する場合には、 $P$  から微小離れた  $Q$  でのベクトルとの差を考える必要があるが、両者は住んでいる空間が全く異なるため、どのように比べればよいか非自明であるからである。

<sup>\*24</sup>  $A, B$  間を結ぶある曲線  $C$  を考える。 $AB$  の距離が無微小  $dl$  であることにより、曲線  $C$  と別の曲線  $C'$  との違いも無微小である。ここで、 $C$  と  $C'$  の違いを考慮しても  $dl$  により高次の補正が加わるだけである。このことから、曲線  $C$  は一意的に存在すると考えてよい。

<sup>\*25</sup> 一般相対論の分野では、双対ベクトルは 1 形式 (one form, 1-form) と呼ばれることが多い。

<sup>\*26</sup> 直感的には、縦ベクトルが与えられれば必ずそれを横ベクトル化したものが考えられる。そして、横ベクトルを左にとり、縦ベクトルを右に取った行列演算はスカラーを与える。ベクトル空間にはこのような双子のベクトル空間が付随していると考えておけば十分である (Appendix B.2 節参照)。また、量子力学でいえば、ケットベクトル  $|\psi\rangle$  に対応する双対ベクトルがブラベクトル  $\langle\psi|$  である。接ベクトル空間  $T_P(\mathcal{M})$  に対して、双対ベクトル空間は  $T_P^*(\mathcal{M})$  と表記されることが多い。

## 双対ベクトルの定義

双対ベクトル  $\omega_a$  はベクトル  $v^a$  からスカラーへの線形関数 (写像) として定義される:

$$\omega_a : v^a \mapsto \langle \omega_a | v^a \rangle \equiv \omega_a v^a \quad (2.33)$$

ここで、双対ベクトルがベクトルに作用してスカラーを与える操作<sup>\*27</sup>を、量子力学のブラケットとの対応から  $\langle \omega_a | v^a \rangle$  と表したが、相対論では単に  $\omega_a v^a$  と表す。以下ではブラケットを用いず、この相対論の記法を用いる。

記法についての注意 (3)

$\omega_a v^a$  ではベクトルを表す上付きの添字と双対ベクトルを表す下付きの添字が同一となっているので、これらの添字は「つぶされて」いるとみなす<sup>\*28</sup>。以下に示すように、つぶされた添字はベクトルや双対ベクトルを表すための「添字」としての機能を失うことになる。すなわち、 $\omega_a v^a$  はスカラーである<sup>\*29</sup>。

双対ベクトルの座標表現

座標系を導入しよう。双対ベクトルの座標基底は  $(dx^\alpha)_a$  と表すものと約束する<sup>\*30</sup>。

ベクトルの座標基底  $(\partial_\mu)^a$  が与えられているとき、これに対応する双対ベクトルの座標基底は、

$$(dx^\alpha)_a (\partial_\mu)^a = \delta_\mu^\alpha \quad (2.35)$$

を満たすものとして導入される<sup>\*31</sup>。これより、座標系  $x^\mu$  における双対ベクトル  $\omega_a$  の成分  $\omega_\alpha$  は

$$\omega_a = \omega_\alpha (dx^\alpha)_a \quad (2.37)$$

によって与えられる。ここで、座標値の微小変分  $dx^\mu$  と双対ベクトルの基底  $(dx^\alpha)_a$  を混同しないように注意されたい。

双対ベクトルの線形性より、

$$\omega_a v^a = (\omega_\alpha (dx^\alpha)_a) (v^\mu (\partial_\mu)^a) = \omega_\alpha v^\mu (dx^\alpha)_a | (\partial_\mu)^a = \omega_\alpha v^\mu \delta_\mu^\alpha = \omega_\mu v^\mu \quad (2.38)$$

となる。特に、 $v^a = (\partial_\mu)^a$  とすれば、

$$\omega_a (\partial_\mu)^a = \omega_\alpha (dx^\alpha)_a | (\partial_\mu)^a = \omega_\alpha \delta_\mu^\alpha = \omega_\mu \quad (2.39)$$

となって、双対ベクトルの座標系  $x^\mu$  における成分が得られる。これらの結果も Appendix B のものと同等である。

<sup>\*27</sup> 双対ベクトルのこの定義も、直感的には、横ベクトルと縦ベクトルを (行列として) 掛ければ実数 (内積) になることから、横ベクトルは縦ベクトルから実数を作り出す操作 (関数・写像) として導入できると考えておけばよい (Appendix B.2 節参照)。

<sup>\*28</sup> 数学的にはあとで説明する「縮約」という操作に対応する。一見、アインシュタインの和の規約と類似する操作に見受けられるが、その意味は大きく異なる (完全に関係がないというわけではない)。

<sup>\*29</sup> これは座標系に依らないテンソル式であるため (テンソルの定義については 2.6 節参照)、座標系に依らないことは明白であるが、実際に座標系に依らないことを (2.41) 式で示す。

<sup>\*30</sup> このように表しておくことと変換則が自然に見えるようになるからである。双対ベクトルの座標基底の変換則 (2.43) と  $f(x^\mu)$  の微分

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \quad (2.34)$$

において  $f(x^\mu) = x'^{\alpha'}(x^\mu)$  とおいたものとの類似性に注目されたい。

<sup>\*31</sup> 双対ベクトルの基底を  $(dx^\alpha)_a$  と表した理由は、微小変位ベクトル  $(dl)^a$  に作用して

$$\langle (dx^\alpha)_a | (dl)^a \rangle = (dx^\alpha)_a (dl)^a = (dx^\alpha)_a dx^\nu (\partial_\nu)^a = dx^\nu \delta_\nu^\alpha = dx^\alpha \quad (2.36)$$

となることに由来する (らしい)。

### 2.5.2 双対ベクトルの変換則

双対ベクトルの成分の変換則を導こう。座標系  $x'^{\mu'}$  の下での成分 (2.39) は、(2.16) 式より座標系  $x^\mu$  での成分を用いて

$$\omega'_{\mu'} = \omega_a (\partial_{\mu'})^a = \omega_a \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} (\partial_\mu)^a = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \omega_\mu \quad (2.40)$$

と表される。これが双対ベクトルの成分の変換則である。双対ベクトルの成分の変換則より、双対ベクトルのベクトルへの作用は座標系に依らないことが示される。実際、

$$v'^{\mu'} \omega_{\mu'} = \left( \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} v^\mu \right) \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu'}} \omega_\alpha \right) = \delta_\mu^\alpha v^\mu \omega_\alpha = v^\mu \omega_\mu \quad (2.41)$$

となるので、たしかに座標不変である<sup>\*32</sup>。

ベクトルの座標基底の場合と同様に、双対ベクトルの基底の変換則は、 $\omega_a = \omega_\alpha (dx^\alpha)_a = \omega'_{\alpha'} (dx'^{\alpha'})_a$  が座標に依らない幾何学的な存在であることと、双対ベクトルの成分の変換則 (2.40) から

$$(dx'^{\alpha'})_a = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} (dx^\alpha)_a \quad (2.43)$$

のように得られる。

## 2.6 テンソル

### 2.6.1 計量テンソル

2.5 節で双対ベクトルを導入した考え方を発展させて、テンソルを導入しよう。既に登場しているテンソルの例は計量テンソル (metric tensor) である：

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b \equiv g_{ab} X^a X^b. \quad (2.44)$$

ここで  $g_{ab}$  のアルファベットの下付き添字は計量テンソルがランク (0, 2) のテンソルであることを示すためのものである。

ここで、ランク (0, 2) のテンソルとは、2つのベクトルからスカラーへの写像のことである。もっと平たく言えば、スカラーを得るためには2つのベクトル (方向) を決める必要があるような「もの」である。あるいは、ランク (0, 2) のテンソルは、ベクトルから双対ベクトル (もう1つベクトルを与えるとスカラーを返す) を作り出すものとも考えることもできる<sup>\*33</sup>。

すなわち、計量テンソルは2つのベクトル  $X^a, X^b$  からスカラー  $ds^2$  を返す写像

$$\mathbf{g} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (2.45)$$

$$g_{ab} : (X^a \in V, X^b \in V) \longmapsto g_{ab} X^a X^b \in \mathbb{R}. \quad (2.46)$$

<sup>\*32</sup>ここで  $\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\mu'}} = \delta_\mu^\alpha$  を用いた。これは

$$\frac{\partial f(x'^{\nu'})}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x'^{\mu'}} \quad (2.42)$$

において、 $f = x^\alpha (x'^{\nu'})$  とすることで示される。

<sup>\*33</sup> この視点からのテンソルについての解説については Appendix A 章および物理数学 C・D の講義ノート 5 章を参照。これらではベクトルと双対ベクトルの区別をしていないが、この講義ノートの読者であれば「ランク (0, 2) のテンソルは、1つのベクトルから双対ベクトルへの写像でもある」ということは理解できるであろう。

ととらえることができるし、また、ベクトル  $X^a$  から双対ベクトル  $g_{ab}X^a$  を返す写像

$$g : V \longrightarrow V^*, \quad (2.47)$$

$$g_{ab} : X^a \in V \longmapsto g_{ab}X^a \in V^* \quad (2.48)$$

と考えることもできる。

ここで、内積の線形性

$$(aV + cW) \cdot (bV + dW) = abV \cdot V + adV \cdot W + cbW \cdot V + cdW \cdot W \quad (2.49)$$

と整合的であるためには、計量テンソルが線形写像であること、すなわち

$$g_{ab}(aV^a + cW^a)(bV^b + dW^b) = abg_{ab}V^aV^b + adg_{ab}V^aW^b + cbg_{ab}W^aV^b + cdg_{ab}W^aW^b. \quad (2.50)$$

でなければならないことは容易に理解できるであろう。

さて、計量テンソルの座標基底による表現はどうなるであろうか。(0, 2) テンソルの基底を  $(\tau^{\mu\nu})_{ab}$  と表し、 $g_{ab} = g_{\mu\nu}(\tau^{\mu\nu})_{ab}$  と基底テンソルで展開すると

$$g_{ab}X^aX^b = g_{\mu\nu}(\tau^{\mu\nu})_{ab}X^\alpha(\partial_\alpha)^aX^\beta(\partial_\beta)^b \quad (2.51)$$

これがスカラー  $g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu$  を与えなければならないこと、および計量テンソルの線形性から

$$(\tau^{\mu\nu})_{ab} = (dx^\mu)_a(dx^\nu)_b = (dx^\mu)_a \otimes (dx^\nu)_b \quad (2.52)$$

であることが結論付けられる<sup>\*34</sup>。

記法についての注意 (4)

ここで  $\otimes$  はテンソル積を表すが、意味としては真ん中の項として理解してよい。すなわち、線形性より、計量テンソルの基底は双対ベクトルの基底同士のテンソル積  $(dx^\mu)_a(dx^\nu)_b = (dx^\mu)_a \otimes (dx^\nu)_b$  で与えられる。より一般に、計量テンソルに限らず、(0, 2) テンソルの基底は  $(dx^\mu)_a(dx^\nu)_b$  である。

以下ではテンソル積の記号  $\otimes$  を省略する。

## 2.6.2 逆計量テンソル

座標系を導入し計量テンソルを  $g_{ab} = g_{\mu\nu}(dx^\mu)_a(dx^\nu)_b$  と表したとき、成分  $g_{\mu\nu}$  は数学的には行列と同等である。計量テンソルの成分を行列とみなしたとき、その逆行列を  $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (2.53)$$

として、 $g^{\mu\nu}$  を成分とするランク (2, 0) のテンソル

$$g^{ab} = g^{\mu\nu}(\partial_\mu)^a(\partial_\nu)^b \quad (2.54)$$

を考える。

$g^{ab}$  は、双対ベクトル同士の内積、

$$g^{ab} : (X_a \in V^*, W_b \in V^*) \longmapsto g^{ab}X_aW_b \in \mathbb{R}. \quad (2.55)$$

<sup>\*34</sup> そうでない場合に (2.50) 式がどうなるか考えてみよう。

あるいは双対ベクトルからベクトルへの写像

$$g_{ab} : X_a \in V^* \mapsto g^{ab} X_a \in V \quad (2.56)$$

のいずれの操作とも考えることができる。

また、計量テンソル  $g_{ab}$  との間に

$$\begin{aligned} g^{ac} g_{cb} &= [g_{\mu\alpha} (dx^\mu)_a (dx^\alpha)_c] [g^{\beta\nu} (\partial_\beta)^c (\partial_\nu)^b] \\ &= g_{\mu\alpha} g^{\beta\nu} \delta_\beta^\alpha (dx^\mu)_a (\partial_\nu)^b = g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} (dx^\mu)_a (\partial_\nu)^b \\ &= \delta_\mu^\nu (dx^\mu)_a (\partial_\nu)^b \equiv \delta_a^b \end{aligned} \quad (2.57)$$

なる関係があるので、 $g^{ab}$  は計量テンソルの「逆」あるいは「双対」とみなすことができる。ただし、 $g^{ab}$  のことも単に計量テンソル (上付きの計量テンソル) と呼ぶことが多い。

### 2.6.3 一般のテンソルとその変換則

より一般に、(複数の) ベクトルや双対ベクトルの組からスカラーへの線形写像をテンソルと呼ぶ<sup>\*35</sup>。すなわち、

————— テンソルの定義 —————

$(k, l)$  のテンソルとは、 $k$  個の双対ベクトルと  $l$  個のベクトルからスカラーへの写像のことである。

また、 $(k, l)$  のテンソルの座標基底を用いた表現は

————— テンソルの基底を用いた表現 —————

$$T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} (\partial_{\mu_1})^{a_1} \dots (\partial_{\mu_k})^{a_k} (dx^{\nu_1})_{b_1} \dots (dx^{\nu_l})_{b_l} \quad (2.58)$$

のようになる<sup>\*36</sup>。

テンソルが幾何学的な実体であることと、ベクトルおよび双対ベクトルの座標基底の変換則 (2.16), (2.43) を用いれば、テンソルの成分の変換則が

————— テンソルの成分の変換則 —————

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\alpha_k}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\beta_1 \dots \beta_l} \quad (2.59)$$

となることを容易に示すことができる (問題)。

このテンソルの成分の変換則より、(2.2) 式のところで述べていたように、物理法則がテンソル式で記述されていれば一般相対性原理が自然に満たされることがわかる。

### 2.6.4 テンソルの縮約と添字の上げ下げ

ここで、テンソルについて次の 2 つの重要な操作を導入しておこう。

<sup>\*35</sup> スカラーを得るために複数のベクトルが必要であるということは、それだけの方向を決める必要があるということである。例えば、弾性体理論における応力テンソルは  $S_{ab}$  のように 2 つの足を持つが、これは、応力値 (スカラー) を得るためには、応力が働く面を指定するための法線ベクトルと、その面に対して働く力のベクトル (方向) の 2 つを指定する必要があるからである。

<sup>\*36</sup> ベクトルはランク (1, 0)、双対ベクトルは (0, 1)、計量テンソルは (0, 2) のテンソルであった。

縮約 (contraction)

縮約とは  $(k, l)$  から  $(k-1, l-1)$  テンソルへの写像である。例えば  $(2, 2)$  テンソルの場合

$$\begin{aligned} T^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(\partial_\mu)^c(\partial_\alpha)^a(dx^\nu)_d(dx^\beta)_b &= T^{ca}_{db} \longrightarrow T^{ca}_{cb} = T^{\mu\alpha}_{\nu\beta}(\partial_\mu)^c(\partial_\alpha)^a(dx^\nu)_c(dx^\beta)_b \\ &= T^{\mu\alpha}_{\nu\beta}\delta^\mu_\nu(\partial_\alpha)^a(dx^\beta)_b \\ &= T^{\mu\alpha}_{\mu\beta}(\partial_\alpha)^a(dx^\beta)_b \end{aligned} \quad (2.60)$$

によって定義される。すなわち、双対ベクトル基底  $(dx^\nu)_c$  のベクトル基底  $(\partial_\mu)^c$  への作用によってテンソルのランクが下がり、対応する成分について和が取られることになる。一般のテンソルの場合への拡張は自明であろう。

計量テンソルによる添字の上げ下げ

計量テンソル  $g_{ab}$ ,  $g^{ab}$  を用いると、テンソルの添字の上げ下げという操作を次のように導入することができる<sup>\*37</sup>：

1. ベクトル  $w^a$  に対して、任意のベクトル  $v^a$  との内積と同等の結果を与える、すなわち、

$$g_{ab}w^av^b = \tilde{w}_bv^b \quad (2.61)$$

を満たす双対ベクトル  $\tilde{w}_b$  が唯一つ存在することが示せる。 $v^a$  は任意であったから、

$$\tilde{w}_b = g_{ab}w^a \quad (2.62)$$

となるが、 $\tilde{w}_b$  の  $\sim$  をはずして  $w_b$  と表記し<sup>\*38</sup>、これを計量テンソルによるベクトルの双対ベクトル化あるいは計量テンソルによる添字の下げと呼ぶ。これにより、「ベクトルの内積」と「双対ベクトルのベクトルへの作用」の間に対応が付けられる<sup>\*39</sup>。

2. 同様に、双対ベクトル  $\omega_a$  を取ったとき、任意のベクトル  $v^a$  に対して、

$$\omega_av^a = g_{ab}\omega^av^b \quad (2.63)$$

を満たすベクトル  $\omega^b$  が唯一つ存在することが示せる。 $v^a$  は任意であったから、

$$\omega_a = g_{ab}\omega^b \quad (2.64)$$

となるが、両辺に  $g^{ac}$  を作用させると<sup>\*40</sup>、

$$g^{ac}\omega_a = g^{ac}g_{ab}\omega^b = \delta^c_b\omega^b = \omega^c \quad (2.65)$$

を得る。これを計量テンソルの逆 (双対) による双対ベクトルのベクトル化あるいは計量テンソル (の逆) による添字の上げと呼ぶ。

<sup>\*37</sup> Appendix B.4 節の説明も参考にすること。

<sup>\*38</sup> 添字の位置が違うので  $w^b$  とは別物であることに注意すればこのように表しても問題はない。

<sup>\*39</sup> 双対ベクトルは (時空に) 計量テンソルが存在しなくても存在する。計量テンソルが加えて存在する場合には、ベクトル空間と双対ベクトル空間に一意的な対応付けが可能であり、これによって計量テンソルによるベクトルの内積操作 (スカラーを与える) と、双対ベクトルのベクトルへの作用 (これもスカラーを与える) に対応が付けられるということ。

<sup>\*40</sup> より正確には、両辺  $g^{dc}$  とのテンソル積を取り、添字  $d$  と  $a$  で縮約を取る操作である。



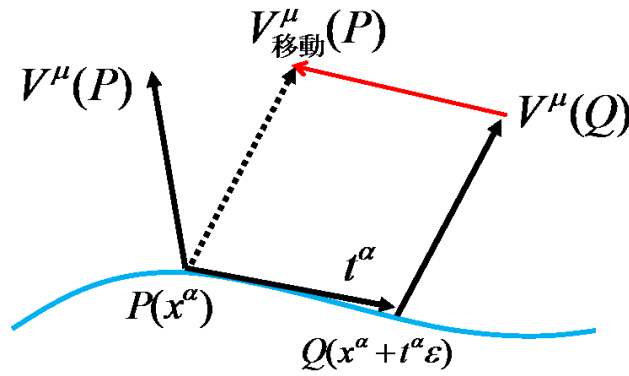


図 2.4 ベクトルの”(平行) 移動”

3. 計量テンソルによる添字の上げ下げは、一般のテンソルに拡張することができる。例えば

$$R^a_{bc} = g^{ad} R_{dbc} = g_{be} R^{ae}_c = g^{ad} g_{be} R^e_{dc} = g_{be} g_{cf} R^{adf} = \dots \tag{2.66}$$

のような添字の上げ下げが可能である。ただし、同じ記号が用いられていても、添字の位置が違う<sup>\*41</sup>ので、 $R^a_{bc}$ ,  $R_{dbc}$ ,  $R^{ae}_c$ ,  $\dots$  はまったく別のテンソルであることを注意しておく<sup>\*42</sup>。

## 2.7 ベクトルとテンソルの共変微分

### 2.7.1 ベクトルの共変微分

曲がった時空における、ベクトル  $V^a$  の曲線  $C$  (接ベクトル  $t^a$ ) に沿った微分を考えよう。曲線  $C$  上の点  $P$  から微小距離離れた  $C$  上の点を点  $Q$  としてその微小変位ベクトルを  $(dl)^a = \epsilon t^a$  とする。ここで、 $V^a(P)$  と  $V^b(Q)$  を比べて微分を定義するためには、ベクトルは始点を同じにしないとその差がとれないことから分かるように、 $V^a(Q)$  を点  $P$  まで何らかのかたちで移動する必要がある<sup>\*43</sup>。これを  $V^a_{移動}(Q \rightarrow P)$  と書こう。

$$V^a_{移動}(Q \rightarrow P) = V^a(Q) + [???]^a. \tag{2.67}$$

この  $[???]^a$  はベクトル  $V^a(Q)$  と、曲線  $C$  すなわち微小変位ベクトル  $\epsilon t^a$  の両方に依存して、これら 2 つを与えるとベクトルを返す操作であるはずである。よって

$$V^a_{移動}(Q \rightarrow P) = V^a(Q) + \epsilon C^a_{bc} t^b V^c(Q) \tag{2.68}$$

と与えられるであろう。この  $V^a_{移動}$  を用いて、ベクトルの微分 (共変微分 (covariant derivative)) を次のように定義することができる。接ベクトル  $t^a$  方向の微分であることに注意して、

$$t^b \nabla_b V^a \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{V^a_{移動}(Q \rightarrow P) - V^a(P)}{\epsilon} \right]. \tag{2.69}$$

<sup>\*41</sup> すなわち、計量テンソル  $g_{ab}$  あるいは計量テンソルの逆  $g^{ab}$  が作用している。

<sup>\*42</sup> 同じ記号を用いる理由は熱力学の場合と同様である。すなわち、内部エネルギー  $U$  に対して、 $U(S, V)$  と  $U(T, V)$  は全く別の関数であるが、 $U$  とは別の記号を用いるとそれが内部エネルギーであったことがわかりづらくなるので、引数が違えば関数も異なるということを暗黙の了解として同じ記号を用いる。同様に、一般相対論では、添字の上下が違えばテンソルとしては異なることを暗黙の了解として同じ記号を用いる。

<sup>\*43</sup> 「微小変位ベクトル」のところでも述べたように、この事実は、点  $P$  におけるベクトルが接空間  $T_P(\mathcal{M})$  上のベクトルであるのに対し、点  $Q$  のベクトルは別の接空間  $T_Q(\mathcal{M})$  上のベクトルであることに因る。

ここで、曲がった空間における微分は通常の偏微分とは異なるので、 $\nabla_a$  という記号を用いて表すことにした\*44。  $C^a_{bc}$  を共変微分  $\nabla_a$  の接続係数と呼ぶ。

ベクトルの共変微分の座標成分

座標系を導入して具体的に考えよう。曲線  $C$  上の点  $P, Q$  の座標を  $P(x^\mu), Q(x^\mu + \epsilon t^\mu)$  とする。  $V^a_{\text{移動}}$  の成分は

$$V^{\alpha}_{\text{移動}}(x^\mu) = V^\alpha(x^\mu + \epsilon t^\mu) + \epsilon C^{\alpha}_{\beta\gamma} t^\beta V^\gamma \quad (2.70)$$

となるから、共変微分の座標成分表示は、

$$t^\beta \nabla_\beta V^\alpha = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{V^{\alpha}_{\text{移動}}(x^\mu) - V^\alpha(x^\mu)}{\epsilon} \right] \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{V^\alpha(x^\mu + \epsilon t^\mu) - V^\alpha(x^\mu)}{\epsilon} + C^{\alpha}_{\beta\gamma} t^\beta V^\gamma \right] \\ &= t^\mu \partial_\mu V^\alpha + C^{\alpha}_{\beta\gamma} t^\beta V^\gamma \\ &= t^\beta [\partial_\beta V^\alpha + C^{\alpha}_{\beta\gamma} V^\gamma]. \end{aligned} \quad (2.72)$$

となる。  $t^a$  の選び方は任意であるから、

ベクトルの共変微分の成分

$$\nabla_\beta V^\alpha = \partial_\beta V^\alpha + C^{\alpha}_{\beta\gamma} V^\gamma \quad (2.73)$$

で与えられる。これがベクトルの共変微分の座標系  $x^\mu$  での成分である\*45。

## 2.7.2 スカラー場の共変微分

スカラー場  $f(x^\mu)$  を微分する際には、ベクトルの微分においてその始点を合わせるために導入された「移動」の操作が必要ない。したがって、スカラー場の共変微分には接続係数  $C^a_{bc}$  があられず、偏微分に一致する。したがってその座標成分は

$$\nabla_\alpha f = \partial_\alpha f \quad (2.74)$$

で与えられる。スカラー場の偏微分は  $(0, 1)$  テンソル (双対ベクトル) であることに注意しよう。

## 2.7.3 双対ベクトルと一般のテンソルの共変微分

スカラーの共変微分が偏微分であることを用いて双対ベクトルの成分の共変微分を求めよう。まず、  $V^b \omega_b$  がスカラーであることに注意すると、

$$\nabla_\alpha (V^\beta \omega_\beta) = \partial_\alpha (V^\beta \omega_\beta) = (\partial_\alpha V^\beta) \omega_\beta + V^\beta \partial_\alpha \omega_\beta, \quad (2.75)$$

一方、共変微分がライプニッツ (Leibniz) 則を満たすことを認めて計算すれば、

$$\nabla_\alpha (V^\beta \omega_\beta) = (\nabla_\alpha V^\beta) \omega_\beta + V^\beta \nabla_\alpha \omega_\beta = [\partial_\alpha V^\beta + C^{\beta}_{\alpha\gamma} V^\gamma] \omega_\beta + V^\beta \nabla_\alpha \omega_\beta \quad (2.76)$$

辺々引いて  $C^{\beta}_{\alpha\gamma} V^\gamma \omega_\beta = C^{\gamma}_{\beta\alpha} V^\beta \omega_\gamma$  のように添字を付け替えると、

$$V^\beta \left[ \nabla_\alpha \omega_\beta - (\partial_\alpha \omega_\beta - C^{\gamma}_{\alpha\beta} \omega_\gamma) \right] = 0 \quad (2.77)$$

\*44 下付き添字にした理由は後ほど明らかになる。

\*45 偏微分は座標系に依存した概念であることに注意。

これが任意の  $V^\beta$  について成り立つので、双対ベクトルの共変微分は

—— 双対ベクトルの共変微分の成分 ——

$$\nabla_\alpha \omega_\beta = \partial_\alpha \omega_\beta - C^\gamma_{\alpha\beta} \omega_\gamma \quad (2.78)$$

となる<sup>\*46</sup>。

一般に、ランク  $(k, l)$  のテンソルの共変微分の成分は、(2.77) 式を導いたの計算を一般化すれば、

—— 一般のテンソルの共変微分の成分 ——

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} = \partial_\alpha T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} + \sum_{i=1}^k C^{\mu_i}_{\alpha\rho} T^{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \rho \mu_{i+1} \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l} \\ - \sum_{j=1}^l C^\rho_{\alpha\nu_j} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_{j-1} \rho \nu_{j+1} \cdots \nu_l} \end{aligned} \quad (2.81)$$

となる。

## 2.7.4 テンソルの平行移動と共変微分

共変微分をもちいて、曲がった時空中におけるベクトルの平行移動は以下のように定義される。

—— 曲がった時空中におけるベクトルの平行移動の定義 ——

ベクトル  $V^a$  が接ベクトル  $t^a$  を持つ曲線  $C$  に沿って平行移動されるための条件は、

$$t^b \nabla_b V^a = 0. \quad (2.82)$$

実際、 $t^b \nabla_b V^a = 0$  であれば、(2.71) 式より、

$$V^a_{\text{移動}}(x^\alpha) = V^a(x^\alpha) \quad (2.83)$$

となり、「移動」によってベクトルが変わらない、すなわち平行移動されていることを意味している<sup>\*47</sup>。

ベクトルの場合とまったく同様に、曲がった時空中におけるテンソルの平行移動は以下のように定義される。

<sup>\*46</sup>このやり方では、共変微分がライプニッツ則を満たすことを示していないのに用いているので気持ちが悪いかもしれない。双対ベクトルに対する共変微分をベクトルの場合と同じように考えると、 $D^\rho_{\beta\alpha}$  を「双対」接続係数として、

$$\nabla_\alpha \omega_\beta = \partial_\alpha \omega_\beta + D^\rho_{\beta\alpha} \omega_\rho \quad (2.79)$$

と表されるであろう。ここで、共変微分のスカラーへの作用が偏微分であること、および共変微分がライプニッツ則を満たすことを要請すると、(2.78) 式を示した流れを逆にたどれば、

$$D^\rho_{\beta\alpha} = -C^\rho_{\beta\alpha} \quad (2.80)$$

となることがわかる。つまり、共変微分がライプニッツ則を満たすという要請によって、ベクトルの共変微分の接続係数と、双対ベクトルの共変微分の接続係数の関係が定まる。さらに、一般のテンソルの共変微分の成分が(2.81)式のようなものも、ライプニッツ則の要請の結果である。本講義では共変微分はライプニッツ則を満たすことを要請する。より数学的に厳密な取り扱いについては、Wald, R. M. (1984) "General Relativity" の3章を参照せよ。

<sup>\*47</sup>2.7.1 節での議論では、一般に異なりうる2点  $P, Q$  のベクトル  $V^a(P), V^a(Q)$  を比べていた。もし  $V^a(Q)$  が  $V^a(P)$  を  $Q$  まで平行移動したものであったとすれば、ベクトル場  $V^a(x^b)$  の点  $P$  における共変微分はゼロになる。

————— 曲がった時空中におけるテンソル平行移動の定義 —————

テンソル  $T^{a_1 \cdots a_k}_{b_1 \cdots b_l}$  が接ベクトル  $t^a$  を持つ曲線  $C$  に沿って平行移動されるための条件は、

$$t^c \nabla_c T^{a_1 \cdots a_k}_{b_1 \cdots b_l} = 0. \quad (2.84)$$

## 2.8 共変微分および接続係数に対する要請

ここで、共変微分と接続係数に関して、以下の事項に注意しよう。

- 接続係数は曲がった時空の2点でベクトルを比べる手法を与えるという意味において、時空の曲がりを記述する量となっている。
- 接続係数は計量テンソルとは独立した概念である。
- 接続係数を1つ決めると共変微分が1つ定まる。すなわち、共変微分は接続係数の数だけ存在する。
- スカラー場の共変微分は偏微分に一致する<sup>\*48</sup>。

また、次の要請を課したことも再確認しておこう。

- 共変微分はライプニッツ則を満たす<sup>\*49</sup>。

これらに留意しつつ、一般相対性理論がその基礎に置く「等価原理」と「一般相対性原理 (一般共変性原理)」に整合的な共変微分とはどのようなものかについて考えよう。

### 2.8.1 一般相対性原理からの要請

まず、「一般相対性原理」について考える。一般相対性原理からの要請である「一般共変性原理」を認めれば、物理法則にあらわれる方程式はテンソル式で記述されなければならない。そこで、テンソルの共変微分がテンソルであることを要請しよう。すると、共変微分にあらわれる接続係数の成分の変換則が次のように定まることになる (2.A.1 節参照)。

————— 一般相対性原理からの共変微分への要請 —————

共変微分はテンソルを一つ階数の高いテンソルへと写像するものであることを要請する。この要請のもとで、接続係数の成分の変換則は、

$$C'^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^{\gamma'}} C^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^{\beta'} \partial x'^{\gamma'}} \quad (2.85)$$

で与えられる。このとき、共変微分を含むテンソル式 (物理法則) についても一般共変性原理が満たされ、したがって一般相対性原理も成り立つ。

テンソルの共変微分がテンソルである一方で、接続係数  $C^a_{bc}$  の成分はテンソルの変換則 (2.59) を満たさず、したがって接続係数  $C^a_{bc}$  そのものはテンソルではないことがわかる。しかしながら、共変微分のテンソル性から

<sup>\*48</sup> そもそも、ベクトルの微分に接続係数が必要であったのは、点  $P$  と点  $Q$  でのベクトル (異なる接空間  $T_P(\mathcal{M})$  と  $T_Q\mathcal{M}$  に棲む) を比べるためであった。座標に依らず同じ時空で定義されるスカラーの場合には、そのような比較の操作はいらないので単純な偏微分に一致する。

<sup>\*49</sup> ベクトルの共変微分 (接続係数) から一般のテンソルの共変微分を自然に定義するために必要な要請である。

- 接続係数そのものはテンソルではないが 2 つの接続係数の差はテンソルである。

ことがいえる。実際、2 つの接続係数  $\bar{C}^a_{bc}$ ,  $C^a_{bc}$  に対して、変換則 (2.85) に基づいて  $\bar{C}^a_{bc} - C^a_{bc}$  の成分を計算すれば、右辺第 2 項がキャンセルして、テンソルの変換則が回復することが分かる<sup>\*50</sup>。

### 2.8.2 等価原理からの要請

「等価原理」が満たされるためには、局所的に重力を消した局所慣性系 ( $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ ,  $C^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ ) が常に張られる必要がある<sup>\*51</sup>。そのために、 $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$  は  $\beta, \gamma$  について対称であることを要請する。この要請のもとで局所慣性系が張れることについては 2.A.2 節で説明する。

#### 等価原理からの接続係数への要請

接続係数が次の対称性を持つことを要請する。取り扱う時空をこのような場合に限定するとき、局所慣性系を常に定義することが可能であり、等価原理が満たされる。

$$C^{\alpha}_{\beta\gamma} = C^{\alpha}_{\gamma\beta} \quad (2.86)$$

ここで、接続係数の対称性の帰結として、スカラー場  $f$  に対して

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f \quad (2.87)$$

が成り立つ。実際、 $\nabla_\alpha f = \partial_\alpha f$  と偏微分の交換可能性にも注意して成分を計算すると、

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha(\nabla_\beta f) &= \partial_\alpha(\nabla_\beta f) - C^{\gamma}_{\alpha\beta}(\nabla_\gamma f) = \partial_\alpha(\partial_\beta f) - C^{\gamma}_{\alpha\beta}(\nabla_\gamma f) \\ &= \partial_\beta(\partial_\alpha f) - C^{\gamma}_{\beta\alpha}(\nabla_\gamma f) = \partial_\beta(\nabla_\alpha f) - C^{\gamma}_{\beta\alpha}(\nabla_\gamma f) \\ &= \nabla_\beta \nabla_\alpha f \end{aligned} \quad (2.88)$$

となっている。

### 2.8.3 時空計量に付随する共変微分と因果律

先に述べたように、共変微分と時空計量  $g_{ab}$  は独立な概念である。しかし、計量が与えられた場合には、その計量に付随した自然な接続係数と共変微分を、以下のようにして導入することができる。そのために、2.7.4 節で考えた平行移動に次の条件を加えよう。

#### 共変微分への要請

平行移動に伴って内積を変えない。

ここで、共変微分を用いて平行移動が定義されており、また、時空計量の存在によって内積が定義されているため、この条件は時空計量と共変微分の関係性に関する要請になっていることに注意しよう。

共変微分と時空計量に対するこの要請によって、時空の因果構造は保たれることになる。すなわち、時間的であるベクトルは時間的であり続け、空間的あるいはヌル的であるベクトルはその性質を保存する<sup>\*52</sup>。

<sup>\*50</sup> あるいは、変換則 (2.85) を持ち出さなくても、2 つの接続係数  $\bar{C}^a_{bc}$ ,  $C^a_{bc}$  に付随する共変微分  $\bar{\nabla}_a$ ,  $\nabla_a$  に対して、テンソルの共変微分の成分 (2.81) において、右辺の偏微分がキャンセルされ、 $\bar{\nabla}T$ ,  $\nabla T$ ,  $T$  がいずれもテンソルであることから接続係数の差もテンソルでなければならないことが帰結される。

<sup>\*51</sup>  $C^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$  の条件は、共変微分が偏微分と一致して特殊相対性理論を回復するために必要。

<sup>\*52</sup> 実は、因果構造を保つべしという観点からは、平行移動によって内積が不変であるという要請は強すぎる。例えば、「平行移動に

ベクトルの長さが  $g_{ab}V^aV^b$  で与えられたこと自然な拡張として、この条件は

$$t^a \nabla_a (g_{bc} V^b W^c) = 0 \quad (2.89)$$

と表される。 $V^b, W^b$  は平行移動の条件 (2.84) 式を満たすものとしているので、

$$t^a \nabla_a (g_{bc} V^b W^c) = V^b W^c t^a \nabla_a g_{bc} = 0. \quad (2.90)$$

よって、任意の  $V^b, W^b$  に対して、その内積が平行移動によって変わらないための条件は

$$\nabla_a g_{bc} = 0 \quad (2.91)$$

が成り立つことと等価である。

ここで、(2.78) 式を導いたのと同様にして ( $\nabla_\mu (g_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta)$  を考える)、計量の共変微分が

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} - C^\rho_{\alpha\beta} g_{\rho\gamma} - C^\rho_{\alpha\gamma} g_{\rho\beta} \quad (2.92)$$

で与えられることを示すことができる (問題) \*53。要請  $\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$  より、

$$C_{\gamma\alpha\beta} + C_{\beta\alpha\gamma} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} \quad (2.93)$$

を得る。ここで  $C_{\gamma\alpha\beta} \equiv g_{\rho\gamma} C^\rho_{\alpha\beta}$  などとした。

添字の付け替え  $\alpha \leftrightarrow \beta$ 、続けて  $\beta \leftrightarrow \gamma$  を行えば、

$$C_{\gamma\beta\alpha} + C_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta g_{\alpha\gamma}, \quad (2.94)$$

$$C_{\beta\gamma\alpha} + C_{\alpha\gamma\beta} = \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \quad (2.95)$$

となる。(2.93) 式 + (2.94) 式 - (2.95) 式として、対称性  $C^\alpha_{\beta\gamma} = C^\alpha_{\gamma\beta}$  を用いると、

$$2C_{\gamma\alpha\beta} = \partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \quad (2.96)$$

両辺に  $g^{\gamma\sigma}$  を作用させ  $g_{\rho\gamma} g^{\gamma\sigma} = \delta_\rho^\sigma$  を用いると、

$$C^\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}) = \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}. \quad (2.97)$$

これはクリストッフェル記号そのものである。すなわち、

— 計量に付随した共変微分 —

計量が与えられている場合には共変微分は2つの等価な要請

1. 平行移動に伴って内積を変えない。
2.  $\nabla_a g_{bc} = 0$

のいずれかによって一意的に定まり、この場合には接続係数はクリストッフェル記号で与えられる。また、このとき、

- 時空の因果構造は保存される

すなわち、時間的/ヌルの/空間的であるベクトルは、平行移動によって (つまり測地線に沿って)、時間的/ヌルの/空間的であり続ける。

よって内積は符号を変えない」という要請によっても因果構造を保つことができる。そのような時空の例としてワイル (Weyl) 時空がある。Weyl 時空では、平行移動によってベクトルのなす角度は保存されるが、ベクトルの大きさは符号を変えないという条件付きで保存されない。これは、時空の各点で物差し (スケール) の変換を許すような時空に対応している。

\*53 共変微分がライプニッツ則を満たすという要請の下で。

以降では、接続係数  $C_{ab}^c$  としてクリストッフェル記号  $\Gamma_{ab}^c$  を採用し、その幾何学構造によって重力場が記述されるとして、重力の相対論的記述を考えていくことにしよう。この場合には時空計量  $g_{ab}$  によって重力場が記述されることになる<sup>\*54</sup>。

## 2.8.4 平行移動と測地線

接続係数をクリストッフェル記号に選ぼう。このとき、平行移動の概念を用いて測地線を「4元速度ベクトル  $u^a$  を自分自身の方向に平行移動した曲線」と定義することもできる。すなわち、測地線方程式は

$$u^a \nabla_a u^b = 0 \quad (2.98)$$

と共変的に表すことができる。(2.98) 式と (1.17) 式が一致することは次のように分かる。(2.73) 式より、(2.98) 式は、

$$u^\alpha (\partial_\alpha u^\beta + \Gamma_{\alpha\mu}^\beta u^\mu) = 0 \quad (2.99)$$

となるが、固有時  $\tau$  を用いて4元速度の成分が

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (2.100)$$

と定義されたことに注意すれば、(2.99) 式の左辺第1項は

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} = \frac{du^\beta}{d\tau} = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} \quad (2.101)$$

となるので<sup>\*55</sup>、(2.98) 式と (1.17) 式は一致する。

## 2.A 2章の補足

### 2.A.1 共変微分のテンソル性と接続係数の変換則

テンソルの共変微分がテンソルであるための条件について調べよう。ただし、一般のテンソルの場合は式が煩雑になるので、ベクトル  $V^a$  の共変微分  $\nabla_b V^a$  がランク (1, 1) のテンソルとなるための条件について考察する。ここでは、接続係数の成分の変換則 (2.85) を採用することで、ベクトルの共変微分の成分 (2.73) が、ランク (1, 1) のテンソルの成分の変換則

$$\partial'_{\beta'} V'^{\alpha'} + C'^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} V'^{\gamma'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} [\partial_\beta V^\alpha + C^\alpha_{\beta\gamma} V^\gamma] \quad (2.102)$$

を満たすことを示そう。ここで  $\partial'_{\beta'} \equiv \frac{\partial}{\partial x'^{\beta'}}$  である。

ベクトルの共変微分の成分 (2.73) には偏微分があらわれるが、偏微分は座標に依存した概念であるからテンソル性を壊す微分である。実際、ベクトルの成分の変換則 (2.18)

$$V'^{\alpha'}(x'^{\mu'}) = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} V^\alpha(x^\mu) \quad (2.103)$$

<sup>\*54</sup>これが一般相対性理論である。一般相対論の拡張として、接続係数  $C_{ab}^c$  を計量  $g_{ab}$  とは独立した量として理論を構築することや、「平行移動による内積の保存」の要請を緩めて理論を構築する試みも可能である。

<sup>\*55</sup>これも多変数関数の微分である。なんとなくの理解ではなく定義に従って腑に落ちる理解の仕方しておくこと。

の両辺を  $x'^{\beta'}$  で微分すれば\*56

$$\frac{\partial V^{\alpha'}}{\partial x'^{\beta'}} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} + V^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial^2 x'^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \quad (2.104)$$

となるが、右辺第2項の存在が邪魔をして、ベクトルの偏微分はテンソルの変換則を満たさない。

ここで、接続係数の成分の変換則 (2.85) 式

$$C'^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^{\gamma'}} C^\alpha_{\beta\gamma} + \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^{\beta'} \partial x'^{\gamma'}} \quad (2.105)$$

を用いることで、ベクトルの共変微分がテンソルの変換性を回復することを示す。

まず、恒等式

$$\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\gamma'}} = \delta_{\gamma'}^{\alpha'} \quad (2.106)$$

を  $x'^{\beta'}$  で微分して得られる結果\*57

$$\left( \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial^2 x'^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \right) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\gamma'}} + \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^{\beta'} \partial x'^{\gamma'}} = 0 \quad (2.107)$$

を用いると、(2.105) 式は

$$C'^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\gamma'}} C^\alpha_{\beta\mu} - \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial^2 x'^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\gamma'}} \quad (2.108)$$

となる。ここで、後の計算に備えて、右辺第1項の和の取られている添字を  $\gamma \rightarrow \mu$  とした。

(2.108), (2.103) 式を用いれば、

$$\begin{aligned} C'^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} V'^{\gamma'} &= C'^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} \left( \frac{\partial x'^{\gamma'}}{\partial x^\gamma} V^\gamma \right) = \left[ \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\gamma'}} C^\alpha_{\beta\mu} - \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial^2 x'^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\gamma'}} \right] \frac{\partial x'^{\gamma'}}{\partial x^\gamma} V^\gamma \\ &= \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \delta_\gamma^\mu C^\alpha_{\beta\mu} V^\gamma - \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial^2 x'^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \delta_\gamma^\alpha V^\gamma \\ &= \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} C^\alpha_{\beta\gamma} V^\gamma - \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \frac{\partial^2 x'^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} V^\alpha \end{aligned} \quad (2.109)$$

を得る。(2.104), (2.109) 式を (2.102) 式の左辺に代入すると、(2.102) 式の右辺に一致することが示される。

同様に、双対ベクトルの共変微分がテンソルの変換性を持つことも示すことができる。一般に、

#### — 共変微分のテンソル性 —

共変微分はランク  $(k, l)$  テンソルをランク  $(k, l + 1)$  テンソルにうつす線形写像である。

ことを示すことができる。

### 2.A.2 接続係数 $C^\alpha_{\beta\gamma}$ の対称性と等価原理について

時空のある点  $P$  で  $C^\alpha_{\beta\gamma}(P) \neq 0$  の場合に、座標変換によって局所的に重力を消した座標系を張ることを考えたい。

$$C'^{\alpha'}_{\beta\gamma}(P) \doteq 0. \quad (2.110)$$

\*56 何度も注意しているが多変数関数の微分である。

\*57 これも多変数関数の微分である。



ここで  $\doteq$  は  $P$  点近傍で張られた座標系でのみ成り立つことをあらわす。一般性を失わず  $P$  を原点とすることができる ( $x^\alpha(P) = 0$ )。

座標変換として以下のものを考えよう。

$$x^\alpha \longrightarrow x'^\alpha = x^\alpha + \frac{1}{2}Q^\alpha_{\beta\gamma}x^\beta x^\gamma. \quad (2.111)$$

このとき、 $x'^\alpha(P) = 0$  でもある。 $Q^\alpha_{\beta\gamma}$  を  $\beta, \gamma$  の入れ替えに対して対称成分と反対称成分に分けて

$$Q^\alpha_{\beta\gamma} = {}^+Q^\alpha_{\beta\gamma} + {}^-Q^\alpha_{\beta\gamma} \quad (2.112)$$

とすると、

$$-Q^\alpha_{\beta\gamma}x^\beta x^\gamma = -{}^-Q^\alpha_{\beta\gamma}x^\beta x^\gamma = -{}^-Q^\alpha_{\beta\gamma}x^\beta x^\gamma \implies 2{}^-Q^\alpha_{\beta\gamma}x^\beta x^\gamma = 0 \quad (2.113)$$

となるので反対称成分は寄与しない。よって一般性を失わず

$$Q^\alpha_{\beta\gamma} = Q^\alpha_{\gamma\beta} \quad (2.114)$$

とできる。

(2.111) 式を微分すると

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho} = \delta^\alpha_\rho + Q^\alpha_{\beta\rho}x^\beta \quad (2.115)$$

$$\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} = Q^\alpha_{\sigma\rho} \quad (2.116)$$

であるが、 $x^\alpha(P) = 0$  より

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\rho}(P) = \delta^\alpha_\rho \quad (2.117)$$

であり、その逆も同様に、

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho}(P) = \delta^\alpha_\rho \quad (2.118)$$

である。

これらを接続係数の変換則 (2.85) 式に代入すると、

$$C'^\alpha_{\beta\gamma}(P) = C^\alpha_{\beta\gamma}(P) - Q^\alpha_{\beta\gamma}. \quad (2.119)$$

ここで、 $C^\alpha_{\beta\gamma}$  が  $\beta, \gamma$  について対称であれば、 $Q^\alpha_{\beta\gamma} = C^\alpha_{\beta\gamma}(P)$  ととることで、座標変換によって重力が見掛け上消された局所座標系をとることができる<sup>\*58</sup>。このような座標系を測地線座標 (geodesic coordinates) と呼ぶ。

ただし、一般には

$$\frac{\partial C'^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\rho} \neq 0 \quad (2.120)$$

であることに注意すること。

<sup>\*58</sup>  $Q^\alpha_{\beta\gamma}$  は  $\beta, \gamma$  について対称であることに注意する。もし  $C^\alpha_{\beta\gamma}$  に反対称成分が含まれると  $Q^\alpha_{\beta\gamma}$  で打ち消せない成分が存在してしまうので、局所慣性系を取ることができない。

### 2.A.3 クリストッフエル記号の変換則

クリストッフエル記号は (1.14) 式で導入された。この定義と接続係数の変換則 (2.85) が整合的であることを確認しておこう。

$x \rightarrow x'$  の座標変換により、

$$\begin{aligned}\Gamma'^{\lambda'}_{\mu'\nu'} &= \frac{\partial x'^{\lambda'}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^{\mu'} \partial x'^{\nu'}} = \frac{\partial x'^{\lambda'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu'}} \left( \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\nu'}} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right), \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \left[ \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\nu'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^{\mu'} \partial x'^{\nu'}} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right] \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^{\mu'}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^{\nu'}} \Gamma^\rho_{\gamma\sigma} + \frac{\partial x'^{\lambda'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^{\mu'} \partial x'^{\nu'}}\end{aligned}\quad (2.121)$$

となるので、クリストッフエル記号は接続係数の変換則 (2.85) を確かに満たしている。

時空に2つの計量  $g_{ab}, \tilde{g}_{ab}$  とそれに付随するクリストッフエル記号  $\Gamma^c_{ab}$  と  $\tilde{\Gamma}^c_{ab}$  が与えられたとき、クリストッフエル記号の差

$$\delta\Gamma^c_{ab} \equiv \tilde{\Gamma}^c_{ab} - \Gamma^c_{ab} \quad (2.122)$$

の成分がテンソルの変換則

$$\delta\Gamma'^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x'^{\gamma'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^{\beta'}} \delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \quad (2.123)$$

を満たすことも同様である。

### 2.A.4 共変微分の表記について

ベクトル  $V^b$  の共変微分  $\nabla_a V^b$  について考えよう。すでに述べたように、共変微分はテンソルを1つ階数の高いテンソルに移す操作であるから、 $\nabla_a V^b = (\nabla_\mu V^\nu)(dx^\mu)_a (\partial_\nu)^b$  のように基底で展開できるはずである。ベクトルの共変微分を成分で表した (2.73) 式より、

$$\begin{aligned}\nabla_a V^b &= \nabla_\alpha V^\beta (dx^\alpha)_a (\partial_\beta)^b \\ &= \left( \partial_\alpha V^\beta + C^\beta_{\alpha\gamma} V^\gamma \right) (dx^\alpha)_a (\partial_\beta)^b\end{aligned}\quad (2.124)$$

となるはずである。これがベクトルの共変微分の基底を用いた正しい表記である。

つまり、

$$\nabla_a V^b = \partial_a V^b + C^b_{ac} V^c \quad (2.125)$$

という表記は、全体としては正しいが、 $\partial_a V^b$  だけ、 $C^b_{ac} V^c$  だけを部分的に「テンソル」と考えるわけにはいかない。実際、2.A.1 節で議論したように、これらの部分だけではテンソルにはなっておらず、2つの部分を合わせてはじめてテンソルになるからである。この注意を踏まえた上で、本講義ノートでは (2.125) 式のような表現法を用いる場合がある。

### 2.A.5 ベクトルの座標基底と接続

ベクトルの共変微分についてもう一度考えよう。

$$\begin{aligned}\nabla_a V^b &= \nabla_a \left( V^\nu (\partial_\nu)^b \right) = (\nabla_a V^\nu) (\partial_\nu)^a + V^\nu \nabla_a (\partial_\nu)^b \\ &= \left( \partial_\alpha V^\beta + C^\beta_{\alpha\gamma} V^\gamma \right) (dx^\alpha)_a (\partial_\beta)^b\end{aligned}\quad (2.126)$$

と形式的に書くことができるが、2番目の等号の右辺第1項は

$$(\nabla_a V^\nu)(\partial_\nu)^b \sim (\partial_\mu V^\nu)(dx^\mu)_a (\partial_\nu)^b \quad (2.127)$$

のような「対応付け」によって得られる\*59。

2番目の等号の右辺第2項に関しては、 $V^\nu \nabla_a (\partial_\nu)^b = C^\nu_{\mu\gamma} V^\gamma (dx^\mu)_a (\partial_\nu)^b$  の「対応付け」ができればよいが、添字を付け替えて  $V^\nu$  で割れば、

$$\nabla_a (\partial_\nu)^b \sim C^\gamma_{\mu\nu} (dx^\mu)_a (\partial_\gamma)^b \quad (2.128)$$

のような「対応付け」が成り立っていればよい。さらに意味を直感的に捉えやすくするために、 $(\partial_\alpha)^a$  方向の共変微分の「成分表示」を  $\nabla_\alpha \equiv (\partial_\alpha)^a \nabla_a$  で定義すれば、

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha (\partial_\nu)^b &= (\partial_\alpha)^a \nabla_a (\partial_\nu)^b \\ &\sim C^\gamma_{\mu\nu} (\partial_\alpha)^a (dx^\mu)_a (\partial_\gamma)^b = C^\gamma_{\mu\nu} \delta^\mu_\alpha (\partial_\gamma)^b \\ &= C^\gamma_{\alpha\nu} (\partial_\gamma)^b \end{aligned} \quad (2.129)$$

となる。

(2.129) 式は、 $\nu$  方向のベクトルの座標基底  $(\partial_\nu)^b$  を  $\alpha$  方向に微分したもの、すなわち曲がった時空で基底  $(\partial_\nu)^b$  が  $\alpha$  方向へどのように変化するべきかを与える式とみなせる。つまり、ある点での基底をを近傍へとつなぐ(接続する)ための関係式において、そこにあらわれる係数が  $C^\gamma_{\alpha\nu}$  である (Appendix B.5 節参照)。

## 2章の問題

1. テンソルの成分の変換則 (2.59) 式を示せ。
2. 計量テンソルの共変微分が (2.92) 式となることを示せ。
3. テンソルの共変微分 (2.81) 式を示せ。
4. ベクトルの共変微分の成分がテンソルの変換則を満たすことを示せ。
5. (発展問題)\*60 4元速度  $u^a$  の観測者から見た\*61電場と磁場は Maxwell テンソル  $F^{ab}$  を用いて、

$$E^a = F^{ab} u_b \quad (2.130)$$

$$B^a = -\frac{1}{2} \epsilon^{abcd} u_b F_{cd} \quad (2.131)$$

で与えられる\*62。

(a) このとき、

$$E^a u_a = 0, \quad B^a u_a = 0 \quad (2.132)$$

であることを示せ\*63。

\*59 ここで、わざわざ「対応付け」というまどろっこしい言い方をして、等号 = ではなく  $\sim$  を用いて記述した理由は、 $(\nabla_a V^\nu)(\partial_\nu)^b$  だけではテンソルではないからである。(2.127) 式の右辺のように書くと、テンソルのように見えるが、実際はそうでないことに注意。

\*60 解がなくてもよい。この問題でも光速  $c = 1$  の単位系を用いる。

\*61 この観測者の時間座標基底ベクトルは  $(e_t)^a = u^a$  であるから、 $u^a$  の成分は  $u^a = (1, 0, 0, 0)$  である。

\*62 電場  $E^a$  と磁場  $B^a$  は、その定義 (2.133) あるいは  $F_{ab}$  の分解 (2.150)、およびこの発展問題に取り組みれば分かるように、観測者 ( $u^a$ ) に依存した量である。すなわち、相対論的な意味で観測者に依らない物理量 (テンソル) は  $F_{ab}$ ,  $A^b$  と  $\mathcal{J}^a$  であり、電場や磁場は観測者に依存しているという意味において副次的な物理量であると言える。

\*63 これより、4元速度  $u^a$  の観測者にとって  $E^a$ ,  $B^a$  は空間的 ( $E^a = (0, \vec{E})$ ,  $B^a = (0, \vec{B})$ ) であることが分かる。

(b) 前問の結果を用いると、 $F_{ab}$  は

$$F^{ab} = u^a E^b - u^b E^a + \epsilon^{abcd} u_c B_d \quad (2.133)$$

のように表すことができることを示せ\*64。

(c)  $u^a$  に対して速度  $\vec{V}$  で運動する観測者  $n^a$  を考える。この観測者系での電場および磁場を  $E'^a$ ,  $B'^a$  とする。電場および磁場の成分がテンソルの成分の変換

$$E'^{\mu'} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} E^\mu, \quad B'^{\mu'} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} B^\mu \quad (2.136)$$

に従うとして変換後の成分を求め、ローレンツ変換の結果\*65と比較せよ。

(d) 観測者  $n^a$  からみた電場は (2.130) 式の自然な拡張として、

$$E'^a = F^{ab} n_b \quad (2.137)$$

で与えられる\*66。 $n^a$  を

$$n^a = \gamma(u^a + V^a), \quad (V^\mu = (0, \vec{V})) \quad (2.138)$$

と分解するとき ( $\gamma = \sqrt{1 - V^2}$  はローレンツ因子)、

$$E'^a = \gamma [E^a + (V_b E^b) u^a + \epsilon^{abcd} V_b u_c B_d] \quad (2.139)$$

となることを示せ。また、 $u^a$  系の基底ベクトルの下での  $E'^a$  の成分が

$$E'^t = \gamma V_i E^i, \quad (2.140)$$

$$E'^i = \gamma (E^i - \epsilon^{ij0k} V_j B_k) = \gamma (E^i + \epsilon^i_{j0k} V^j B^k) \quad (2.141)$$

で与えられることを示せ\*67。

(e) (2.140), (2.141) 式は、 $E'^a$  の  $u^a$  系での成分であるから、ベクトルの成分の変換則\*68

$$E'^{\mu'} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} E'^\mu \quad (2.142)$$

によって、 $n^a$  系での  $E'^a$  の成分が得られる。 $\vec{V} = (V, 0, 0)$  の場合に、 $n^a$  系での成分が

$$E'^t = 0, \quad (2.143)$$

$$E'^x = E^x, \quad (2.144)$$

$$E'^i = \gamma (E^i + \epsilon^i_{x0k} V B^k) \quad (i = y, z) \quad (2.145)$$

となることを示し、ローレンツ変換の場合と比較せよ。

\*64 略解: (2.133) 式から (2.130) 式が得られることは直ちに分かる。(2.131) 式については、公式

$$\epsilon_{abef} \epsilon^{efcd} = -2(\delta_a^c \delta_b^d - \delta_a^d \delta_b^c) \quad (2.134)$$

を用いて、次のように示される:

$$\begin{aligned} \epsilon^{abcd} u_b F_{cd} &= \epsilon^{abcd} (u_b u_c E_d - u_b u_d E_c + \epsilon_{cdef} u^e B^f u_b) \\ &= +\epsilon^{abcd} \epsilon_{cdef} u^e B^f u_b = -2(\delta_e^a \delta_f^b - \delta_f^a \delta_e^b) u^e B^f u_b \\ &= -2B^a \end{aligned} \quad (2.135)$$

\*65 例えば、「理論電磁気学 (第 3 版)」砂川重信著の 11 章 2 節を参照。

\*66 したがって、 $E^a$  と  $E'^a$  はまったく別のベクトルである。一方、(2.136) 式は同じベクトルの異なる観測者での表現である。前問で両者が一致しないのは当然の結果である。

\*67 観測者  $u^a$  系での  $n^a$  の成分は  $n^\alpha = \gamma(1, V^i)$  である。もちろん、観測者  $n^a$  系での  $n^a$  の成分は  $n^{\alpha'} = (1, 0)$  であるが、これは成分のローレンツ変換  $n^{\alpha'} = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} n^\alpha$  から得られる。

\*68 今度は (2.136) 式とは異なり、正しい計算である。

(f) 磁場の変換も (2.131) 式を用いて行えるが、

$$*F^{ab} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{abcd}F_{cd} = B^a u^b - B^b u^a - \epsilon^{abcd}E_c u_d \quad (2.146)$$

を用いて、磁場が

$$B^a = *F^{ab}u_b \quad (2.147)$$

と表されることを用いたほうが便利である。(2.146) 式を示せ\*69。

(g) (2.147) 式を用いて磁場の変換則を求め、その結果をローレンツ変換と比較せよ。

(h) 4元速度  $u^a$  で等速運動する観測者を考える\*70。このとき、4元電流は

$$\mathcal{J}^a = \rho_e u^a + j^a, \quad u_a j^a = 0 \quad (2.150)$$

のように分解できる。電荷密度が

$$\rho_e = -\mathcal{J}^a u_a \quad (2.151)$$

で与えられることを確かめ、別の観測者  $n^a$  にとっての電荷密度  $\rho'_e = -\mathcal{J}^a n_a$  を求めよ\*71。

(i) 共変形式の Maxwell 方程式は

$$\nabla_b F^{ab} = 4\pi \mathcal{J}^a \quad (2.152)$$

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \quad (2.153)$$

$$(2.154)$$

で与えられる。これから観測者  $u^a$  にとっての電場  $E^a$  と磁場  $B^a$  が従う Maxwell 方程式を導くことを考える。そのためには、射影

$$u_a \partial_b F^{ab} = 4\pi \mathcal{J}^a u_a, \quad \perp_u \partial_b F^{ab} = 4\pi \perp_u \mathcal{J}^a \quad (2.155)$$

を考えればよい。ここで  $\perp_u$  は  $u^a$  と垂直な方向 (つまり空間方向) に射影する演算子である\*72 :

$$\perp_u A^a \equiv (\delta_c^a + u^a u_c) A^c. \quad (2.156)$$

このとき、Maxwell 方程式が

$$\partial_i E^i = 4\pi \rho_e, \quad \epsilon^{ij}_{k0} \partial_j B^k = \partial_t E^i + 4\pi j^i \quad (2.157)$$

のようになることを示せ\*73。

\*69 略解: 公式 (2.134) を用いて次のように示される。

$$\begin{aligned} *F^{ab} &= \frac{1}{2}\epsilon^{abcd}F_{cd} = \frac{1}{2}\epsilon^{abcd}(u_c E_d - u_d E_c + \epsilon_{cdef}u^e B^f) \\ &= \epsilon^{abcd}u_c E_d - (\delta_e^a \delta_f^b - \delta_e^b \delta_f^a)u^e B^f \\ &= -u^a B^b + u^b B^a + \epsilon^{abcd}u_c E_d \\ &= B^a u^b - B^b u^a - \epsilon^{abcd}E_c u_d \end{aligned} \quad (2.148)$$

尚、この  $*F^{ab}$  を用いると、Maxwell 方程式 (2.153) 式は

$$\partial_b *F^{ab} = 0 \quad (2.149)$$

と同等になる。

\*70 等速運動でない場合には、(2.155) 式の計算において、 $u_a \partial_b F^{ab} = \partial_b (u_a F^{ab}) - F^{ab} \partial_b u_a$  より、 $F^{ab} \partial_b u_a$  から加速度項などがあらわれる。

\*71 4元電流の分解 (2.150) が観測者 ( $u^a$ ) に依存していることから分かる通り、電荷密度  $\rho_e$  や3次元電流  $\vec{j}$  も観測者に依存した「副次的な」物理量である。

\*72 このとき、確かに  $\perp_u u^a = 0$  となっている。

\*73  $\epsilon^{ij}_{k0} \partial_j B^k = \nabla \times \vec{B}$  であることに注意すれば、これは通常の Maxwell 方程式と一致していることが分かる。

(j) この結果から、4 元速度  $n^a$  で等速運動する観測者にとっての Maxwell 方程式も、

$$F^{ab} = n^a E'^b - n^b E'^a + \epsilon^{abcd} B'_c n_d, \quad (2.158)$$

$$\mathcal{J}^a = \rho'_e n^a + j'^a, \quad n_a j'^a = 0 \quad (2.159)$$

のように電磁場  $F_{ab}$  と電流  $\mathcal{J}^a$  を観測者  $n^a$  にとっての諸量で表しておけば、観測者  $u^a$  の場合と同じ形になることを示せ。

## 第3章

# 重力の本質と時空の曲率

重力はその幾何学化により計量テンソルへと姿を変えたが、等価原理により、少なくとも局所的には特殊相対性理論が成り立ち、 $g_{ab} = \eta_{ab}$ ,  $\Gamma^c_{ab} = 0$  とできてしまう (2.A.2 節参照)。それでは重力の本質とは何であろうか？

一様に加速されたロケット中の観測者と、地球の重力場中の観測者が、2つの質点の運動を観察する思考実験を考える。1つの質点の観測からは両者は区別できない ( $g_{ab} = \eta_{ab}$ ,  $\Gamma^c_{ab} = 0$ )。しかしながら、2つの質点の運動を観測すれば、地球の重力場中では潮汐力が働くので、2つの質点の間の距離は変化するはずである。アインシュタインはここに重力の本質を見だし、この考察を推し進めてアインシュタイン方程式を”導い”た。潮汐力の幾何学的対応物を見ると、それは時空の曲率である。本章では時空の曲率を記述する数学についてまとめる。

### 3.1 重力場と潮汐力

Newton 重力の場合に重力と慣性力の関係についてもう一度考えよう。一様加速度による慣性力と重力の一つの違いは、重力は一般に空間的に非一様であることである。実際、一様に加速されているロケットの中の運動と重力場中の運動との大きな違いは、重力場中では潮汐力が働くことである。潮汐力は局所的にも消すことができないので、これを重力の本質の候補であるとみなして議論を進めてみよう。

重力場の本質に対する仮説

局所的に消すことができない潮汐力こそが重力の本質的な実体である。

Newton 重力理論で、微小距離  $\chi^i$  だけ離れた 2 つの質点  $A, B$  の運動を考える。運動方程式は

$$A: \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \phi(x^k), \quad (3.1)$$

$$B: \frac{d^2 (x^i + \chi^i)}{dt^2} = -\delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \phi(x^k + \chi^k). \quad (3.2)$$

辺々引いて  $AB$  間のベクトルの発展方程式は

$$\frac{d^2 \chi^i}{dt^2} = -\delta^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j \partial x^k} \chi^k. \quad (3.3)$$

右辺に出てくる項が 2 点間に働く潮汐力である。潮汐力が重力の本質とすると、それは重力場  $\phi$  の 2 階微分で表される。

2.A.2 節の最後に注意したように、一般にクリストッフェル記号の微分はゼロにできない。クリストッフェル記号は計量テンソルの1階微分であったから、クリストッフェル記号の微分は計量テンソルの2階微分であり、すなわち重力場の2階微分であり、局所的にもゼロにできない。何か有望そうな香りを感じるので、一般相対性理論の場合に潮汐力について調べてみよう。

## 3.2 測地線偏差の方程式とリーマンの曲率テンソル

### 3.2.1 座標基底ベクトルとその交換子

一般相対性理論では質点  $A, B$  はそれぞれ測地線上を動く。質点  $A, B$  に限らず、時空を埋めつくす測地線 (の族 (family)) を考えて、測地線の固有時  $x^0 = \tau$  を時間座標にとる。さらに、各測地線に  $s$  というラベルをつければ<sup>\*1</sup>、 $x^1 = s$  が空間座標となる。このように座標  $(\tau, s)$  を設定すると、座標基底ベクトル  $T^a, X^a$  は次で与えられる。

$$T^a = \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^a, \quad X^a = \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^a. \quad (3.4)$$

数学的準備：ベクトルの交換子

ここで、任意のベクトル  $V^a, W^a$  が、スカラー場の方向微分で

$$V^a(f) = \left( \frac{d}{dv} \right)^a (f) = \frac{df}{dv}, \quad W^a(f) = \left( \frac{d}{dw} \right)^a (f) = \frac{df}{dw} \quad (3.5)$$

と与えられているとしよう。ここで、 $df/dv, df/dw$  はまたスカラー場であるので、その交換子 (commutator) を、

$$[V, W]^a(f) \equiv V^a(W(f)) - W^a(V(f)) = V^a(df/dw) - W^a(df/dv) \quad (3.6)$$

で定義する。

ある座標基底のもとで

$$V^a = \frac{dx^\alpha}{dv} (\partial_\alpha)^a = V^\alpha (\partial_\alpha)^a, \quad W^a = \frac{dx^\alpha}{dw} (\partial_\alpha)^a = W^\alpha (\partial_\alpha)^a \quad (3.7)$$

と成分表示できるとすると、

$$\begin{aligned} V(W(f)) &= \frac{dx^\alpha}{dv} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{df}{dw} \right) = \frac{dx^\alpha}{dv} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{dx^\beta}{dw} \frac{\partial f}{\partial x^\beta} \right) = V^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( W^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\beta} \right) \\ &= (V^\alpha \partial_\alpha W^\beta) \partial_\beta f + V^\alpha W^\beta \partial_\alpha \partial_\beta f \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる。同様に

$$W(V(f)) = (W^\alpha \partial_\alpha V^\beta) (\partial_\beta) f + V^\alpha W^\beta \partial_\beta \partial_\alpha f \quad (3.9)$$

となるが、偏微分の交換可能性より右辺第2項同士がキャンセルして、交換子の成分表示は

$$[V, W]^a(f) = (V^\alpha \partial_\alpha W^\beta - W^\alpha \partial_\alpha V^\beta) (\partial_\beta)^a f \quad (3.10)$$

となる。

ここで、クリストッフェル記号の対称性  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$  より、交換子の成分は

$$[V, W]^\beta = V^\alpha \partial_\alpha W^\beta - W^\alpha \partial_\alpha V^\beta = V^\alpha \nabla_\alpha W^\beta - W^\alpha \nabla_\alpha V^\beta \quad (3.11)$$

\*1 簡単のために空間1次元の場合を考える



のように共変微分を用いて表すことができるので\*2、交換子も幾何学的なベクトルであることが分かる。よって、テンソル式

$$[V, W]^a = V^b \nabla_b W^a - W^b \nabla_b V^a \quad (3.12)$$

としてよい。

### 座標基底ベクトルの交換子

ここで、 $V^a, W^a$  として座標基底ベクトル  $T^a, X^a$  を選ぶと、 $T^\alpha = (1, 0), X^\alpha = (0, 1)$  を (3.11) 式に代入すれば直ちに分かるように、交換子の成分は消える。すなわち、座標基底ベクトルの交換子は 0 である。これより座標基底  $T^a, X^b$  に対して、

$$T^a \nabla_a X^b = X^a \nabla_a T^b \quad (3.13)$$

が一般的に成り立つ\*3。

### 3.2.2 測地線偏差の方程式とリーマンの曲率テンソルの導入

以上の準備の下、潮汐力の方程式 (3.3) について、その一般相対性理論への拡張を考える。潮汐力は測地線の間のベクトル  $X^a$  の時間に関する 2 階微分で記述される。時間方向の微分のテンソル表記は  $T^a \nabla_a$  であるので、 $T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a)$  を計算すればよい\*4。その結果は、

$$\begin{aligned} T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) &\stackrel{(3.13)}{=} T^c \nabla_c (X^b \nabla_b T^a) \\ &= (T^c \nabla_c X^b) (\nabla_b T^a) + X^b T^c \nabla_c \nabla_b T^a \\ &= (X^c \nabla_c T^b) (\nabla_b T^a) + X^b T^c \nabla_b \nabla_c T^a - X^b T^c [\nabla_b \nabla_c T^a - \nabla_c \nabla_b T^a] \\ &= X^c \nabla_c (T^b \nabla_b T^a) + X^b T^c R_{bcd}{}^a T^d \\ &= R_{bcd}{}^a X^b T^c T^d \end{aligned} \quad (3.15)$$

となる。これを測地線偏差の方程式 (geodesic deviation equation) と呼ぶ。最後の等号で  $T^a$  が測地線の接ベクトルであること  $T^b \nabla_b T^a = 0$  を用い、次のように定義されるリーマンの曲率テンソル (曲率テンソル, リーマンテンソルとも呼ぶ) を導入した\*5。

リーマンの曲率テンソル (Riemann curvature tensor)

$$R_{bcd}{}^a T^d \equiv -(\nabla_b \nabla_c - \nabla_c \nabla_b) T^a \quad (3.16)$$

\*2 右辺を計算するとクリストッフェル記号がキャンセルして偏微分だけが残る。

\*3 この結果は、偏微分の入れ替えに対する対称性から、座標基底の場合に成り立つ以下の計算によっても示せる。

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial \tau} \\ &= T^\mu \partial_\mu (X^\nu \partial_\nu f) - X^\mu \partial_\mu (T^\nu \partial_\nu f) = T^\mu \partial_\mu (X^\nu \nabla_\nu f) - X^\mu \partial_\mu (T^\nu \nabla_\nu f) \\ &= T^\mu \nabla_\mu (X^\nu \nabla_\nu f) - X^\mu \nabla_\mu (T^\nu \nabla_\nu f) \\ &= [T^\mu \nabla_\mu X^\nu - X^\mu \nabla_\mu T^\nu] \nabla_\nu f + T^\mu X^\nu [\nabla_\mu \nabla_\nu f - \nabla_\nu \nabla_\mu f] \\ &= [T^\mu \nabla_\mu X^\nu - X^\mu \nabla_\mu T^\nu] \nabla_\nu f \end{aligned} \quad (3.14)$$

3 番目の等号で  $f$  がスカラーであること、4 番目の等号で  $T^\nu \nabla_\nu f$  と  $X^\nu \nabla_\nu f$  がスカラーであることを用いて偏微分を共変微分書き換えた。最後の等号でクリストッフェル記号の対称性からの帰結 (2.87) 式を用いた。任意のスカラー場に対してこれが成り立つことから、(3.13) 式が結論付けられる。

\*4  $U^a \equiv T^b \nabla_b X^a$  は  $X^a$  の速度ベクトルであるので、 $a^a \equiv T^c \nabla_c U^a = T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a)$  は加速度ベクトルに対応する。

\*5 リーマンテンソルが時空の曲率と関連していることについては 3.A.1 節を参照。

もし潮汐力が重力の本質であるとする、一般相対性理論においてはリーマンテンソルが重力の本質と深く関わっていると考えられる。そこで、次節ではリーマンテンソルの性質について詳しく調べることにする。

その前に、次節で用いることになるので、双対ベクトルを用いたリーマンテンソルの表式を導いておこう。 $t^c\omega_c$  がスカラーであることおよび (2.87) 式に注意して、

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(t^c \omega_c) \\ &= \nabla_a(\omega_c \nabla_b t^c + t^c \nabla_b \omega_c) - \nabla_b(\omega_c \nabla_a t^c + t^c \nabla_a \omega_c) \\ &= \omega_c(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)t^c + t^c(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c \\ &= -\omega_c R_{abd}{}^c t^d + t^c(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c. \end{aligned} \quad (3.17)$$

となる\*6。よって、双対ベクトルを用いたリーマンテンソルの表式は

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d. \quad (3.18)$$

となる。

### 3.3 リーマンテンソルの性質

本節では、一般相対性理論において重力の本質と深く関わっていると考えられるリーマンテンソルの性質について調べよう。

#### 3.3.1 対称性

リーマンテンソルは以下の対称性を持つ\*7。

—— リーマンテンソルの対称性 ——

$$R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d. \quad (3.19)$$

$$R_{[abc]}{}^d = 0. \quad (3.20)$$

$$R_{abcd} = -R_{abdc} \quad (\text{for } \nabla_a g_{bc} = 0). \quad (3.21)$$

まず、(3.19) 式が成り立つことは、リーマンテンソルの定義式から明らかである。次に (3.20) 式について考えよう。まず用いる記号の準備を行う。

対称化操作の記号

(3.20) 式に現れる添字にあらわれる  $[abc]$  の記号は、括弧で囲まれている添字に対して完全反対称化することを意味する。

$$T_{[a_1 \dots a_n]} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} \sigma_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(n)}}. \quad (3.22)$$

\*6 この3番目の等号は、 $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)$  をひとつかたまりの微分演算子とみなした場合に、ライブニッツ則が満たされていることを示している。

\*7 これらの対称性から得られる結果 (3.34) もよく用いられる対称性である。ただし (3.34) 式の対称性は本家の対称性 (3.19)–(3.21) 式から導かれるので、新たな (独立な) 対称性ではないことに注意すること

ここで和はすべての置換に対してとり、 $\sigma_\pi$  は偶置換なら 1、奇置換なら  $-1$  である。例えば、ランク  $(0, 2)$  および  $(0, 3)$  テンソルに対しては

$$T_{[ab]} = \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}), \quad (3.23)$$

$$S_{[abc]} = \frac{1}{6}(S_{abc} - S_{acb} + S_{cab} - S_{cba} + S_{bca} - S_{bac}) \quad (3.24)$$

となる\*8。隣り合う添字を入れ替える毎に  $-$  符号を付与していけばよい。

同様に、完全対称化操作の記号

$$T_{(a_1 \dots a_n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(n)}} \quad (3.25)$$

もししばしば用いられる。

対称性の証明

共変微分の定義から、任意の双対ベクトルに対し

$$\nabla_{[a} \nabla_b \omega_c] = 0 \quad (3.26)$$

を示すことができる\*9。これより任意の  $\omega_d$  に対して

$$0 = 2\nabla_{[a} \nabla_b \omega_c] = \nabla_{[a} \nabla_b \omega_c] - \nabla_{[b} \nabla_a \omega_c] = R_{[abc]}^d \omega_d. \quad (3.28)$$

これは (3.20) 式が成り立つことを示している。さらに、(3.19) 式と組み合わせれば、

$$R_{abc}^d + R_{bca}^d + R_{cab}^d = 0 \quad (3.29)$$

を得る。

(3.21) 式を示すには (3.18) 式を示したときの計算を帰納的に行った結果得られる\*10

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots d_l} = \sum_{j=1}^l R_{abd_j}^e T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots e \dots d_l} - \sum_{i=1}^k R_{abe}^{c_i} T^{c_1 \dots e \dots c_k}_{d_1 \dots d_l} \quad (3.31)$$

\*8  $T_{[ab]}$ ,  $S_{[abc]}$  は完全反対称テンソルになっている。

\*9 少し面倒だが単純計算である。以下をすべて足し合わせればよい。

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b \omega_c &= \partial_a \nabla_b \omega_c - \Gamma_{ab}^d \nabla_d \omega_c - \Gamma_{ac}^d \nabla_b \omega_d \\ &= +\partial_a [\partial_b \omega_c - \Gamma_{bc}^d \omega_d] - \Gamma_{ab}^d [\partial_d \omega_c - \Gamma_{cd}^e \omega_e] - \Gamma_{ac}^d [\partial_b \omega_d - \Gamma_{bd}^e \omega_e], \\ -\nabla_a \nabla_c \omega_b &= -\partial_a [\partial_c \omega_b - \Gamma_{bc}^d \omega_d] + \Gamma_{ac}^d [\partial_d \omega_b - \Gamma_{bd}^e \omega_e] + \Gamma_{ab}^d [\partial_c \omega_d - \Gamma_{cd}^e \omega_e], \\ \nabla_c \nabla_a \omega_b &= +\partial_c [\partial_a \omega_b - \Gamma_{ab}^d \omega_d] - \Gamma_{ac}^d [\partial_d \omega_b - \Gamma_{bd}^e \omega_e] - \Gamma_{bc}^d [\partial_a \omega_d - \Gamma_{ad}^e \omega_e], \\ -\nabla_c \nabla_b \omega_a &= -\partial_c [\partial_a \omega_b - \Gamma_{ab}^d \omega_d] + \Gamma_{bc}^d [\partial_d \omega_a - \Gamma_{ad}^e \omega_e] + \Gamma_{ac}^d [\partial_b \omega_d - \Gamma_{bd}^e \omega_e], \\ \nabla_b \nabla_c \omega_a &= +\partial_c [\partial_a \omega_b - \Gamma_{ab}^d \omega_d] - \Gamma_{bc}^d [\partial_d \omega_a - \Gamma_{ad}^e \omega_e] - \Gamma_{ab}^d [\partial_c \omega_d - \Gamma_{cd}^e \omega_e], \\ -\nabla_b \nabla_a \omega_c &= -\partial_a [\partial_c \omega_b - \Gamma_{bc}^d \omega_d] + \Gamma_{ab}^d [\partial_d \omega_c - \Gamma_{cd}^e \omega_e] + \Gamma_{bc}^d [\partial_a \omega_d - \Gamma_{ad}^e \omega_e] \end{aligned} \quad (3.27)$$

\*10 すなわち、 $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)$  がライプニッツ則を満たすことに注意して

$$0 = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) (T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots d_l} \omega_{c_1} \dots \omega_{c_k} v^{d_1} \dots v^{d_l}) \quad (3.30)$$

を計算し、 $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c$  には (3.18) 式を、 $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) v^d$  には (3.16) 式を用いればよい。

を計量テンソルに用いればよい。結果は

$$0 = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) g_{cd} = R_{abc}{}^e g_{de} + R_{abd}{}^e g_{ce} = R_{abcd} + R_{abdc} \quad (3.32)$$

となるので、(3.21) 式が成り立つ。

リーマンテンソルの対称性 (3.19)–(3.21) から導かれる対称性

リーマンテンソルの対称性 (3.19) (3.21) を用いると、

$$\begin{aligned} R_{abcd} &= -R_{abdc} \\ &= R_{bdac} + R_{dabc} \\ &= -R_{bdca} - R_{dacb} \\ &= R_{dcba} + R_{cbda} + R_{acdb} + R_{cdab} \\ &= R_{cdab} + R_{bcad} + R_{cabd} + R_{cdab} \\ &= 2R_{cdab} - R_{abcd}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

となるので、リーマンテンソルは以下の対称性も持つ。

$$R_{abcd} = R_{cdab}. \quad (3.34)$$

ただし、この対称性は (3.19)–(3.21) 式から導かれたものであるので、リーマンテンソルの独立成分に対して新たな制約を課すものではない。

### 3.3.2 ビアンキ恒等式

アインシュタイン方程式を導く上で重要となる次のビアンキ恒等式 (Bianchi identity) を示しておこう。

ビアンキ恒等式

$$\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0. \quad (3.35)$$

ビアンキ恒等式 (Bianchi identity) を示すためにはまず以下の2式が成り立つことに注意する。

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \nabla_c \omega_d = R_{abc}{}^e \nabla_e \omega_d + R_{abd}{}^e \nabla_c \omega_e, \quad (3.36)$$

$$\nabla_a (\nabla_b \nabla_c \omega_d - \nabla_c \nabla_b \omega_d) = \omega_e \nabla_a R_{bcd}{}^e + R_{bcd}{}^e \nabla_a \omega_e \quad (3.37)$$

ここで、 $\nabla_{[b} \nabla_a \nabla_{c]} \omega_d = \nabla_{[a} \nabla_c \nabla_{b]} \omega_d$  に注意すると、左辺は  $a, b, c$  の完全反対称化によって等しくなる。よって右辺も等しくなるべきで、

$$R_{[abc]}{}^e \nabla_e \omega_d + R_{[ab|d]}{}^e \nabla_{c]} \omega_e = \omega_e \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e + R_{[bc|d]}{}^e \nabla_{a]} \omega_e \quad (3.38)$$

ここで  $|d|$  は  $d$  については反対称化の操作をとらないことを示す。左辺第1項は対称性 (3.20) 式によって消え、第2項同士はキャンセルする。よって

$$\omega_e \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0. \quad (3.39)$$

これはビアンキ恒等式が成り立つことを示す。

### 3.3.3 Ricci テンソル、Ricci スカラー、及び Einstein テンソル

リーマンテンソルの第 2,4 添字について縮約をとったものをリッチテンソル (Ricci tensor) と呼ぶ。

リッチテンソル

$$R_{ac} = R_{abc}{}^b. \quad (3.40)$$

リーマンテンソルの対称性 (3.34) より、リッチテンソルは対称テンソルである。

$$R_{ab} = R_{ba} \quad (3.41)$$

リッチテンソルについてさらに縮約をとるとリッチスカラー (スカラー曲率) を得る。

$$R = R^a{}_a. \quad (3.42)$$

ビアンキ恒等式の縮約をとると、一般相対性理論で重要な役割を果たす方程式が得られる。

$$\nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} = 0. \quad (3.43)$$

さらに  $g^{ed}$  を作用させて添字  $d$  を上げ、 $b, e$  の縮約をとると、

$$\nabla_a R_c{}^a + \nabla_b R_c{}^b - \nabla_c R = 0. \quad (3.44)$$

これより次のアインシュタインテンソル (Einstein tensor) を定義すると<sup>\*11</sup>、

アインシュタインテンソル

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}. \quad (3.45)$$

縮約されたビアンキ恒等式は

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \quad (3.46)$$

となる。

## 3.4 リーマンテンソルの成分

ここでリーマンテンソルの成分を求めておこう。まず、(3.18) 式の左辺の成分を計算すると、

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\beta \omega_\gamma &= +\partial_\alpha (\partial_\beta \omega_\gamma - \Gamma^\rho{}_{\beta\gamma} \omega_\rho) - \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta} (\partial_\sigma \omega_\gamma - \Gamma^\rho{}_{\sigma\gamma} \omega_\rho) - \Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma} (\partial_\beta \omega_\sigma - \Gamma^\rho{}_{\beta\sigma} \omega_\rho), \\ -\nabla_\beta \nabla_\alpha \omega_\gamma &= -\partial_\beta (\partial_\alpha \omega_\gamma - \Gamma^\rho{}_{\alpha\gamma} \omega_\rho) + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\beta} (\partial_\sigma \omega_\gamma - \Gamma^\rho{}_{\sigma\gamma} \omega_\rho) + \Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma} (\partial_\alpha \omega_\sigma - \Gamma^\rho{}_{\alpha\sigma} \omega_\rho), \end{aligned}$$

より、偏微分の交換可能性に注意して、

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma}{}^\rho \omega_\rho &= -\partial_\alpha (\Gamma^\rho{}_{\beta\gamma} \omega_\rho) + \partial_\beta (\Gamma^\rho{}_{\alpha\gamma} \omega_\rho) - \Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma} (\partial_\beta \omega_\sigma - \Gamma^\rho{}_{\beta\sigma} \omega_\rho) + \Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma} (\partial_\alpha \omega_\sigma - \Gamma^\rho{}_{\alpha\sigma} \omega_\rho) \\ &= \left( -\partial_\alpha \Gamma^\rho{}_{\beta\gamma} + \partial_\beta \Gamma^\rho{}_{\alpha\gamma} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma} \Gamma^\rho{}_{\beta\sigma} - \Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma} \Gamma^\rho{}_{\alpha\sigma} \right) \omega_\rho \\ &\quad + \left( -\Gamma^\rho{}_{\beta\gamma} \partial_\alpha \omega_\rho + \Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma} \partial_\alpha \omega_\sigma \right) + \left( -\Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma} \partial_\beta \omega_\sigma + \Gamma^\rho{}_{\alpha\gamma} \partial_\beta \omega_\rho \right) \\ &= \left( -\partial_\alpha \Gamma^\rho{}_{\beta\gamma} + \partial_\beta \Gamma^\rho{}_{\alpha\gamma} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma} \Gamma^\rho{}_{\beta\sigma} - \Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma} \Gamma^\rho{}_{\alpha\sigma} \right) \omega_\rho \end{aligned} \quad (3.47)$$

\*11 その名が示す通りアインシュタイン方程式にあらわれる。

を得る。 $\omega_\rho$  は任意なので、リーマンテンソルの成分は、

—— リーマンテンソルの成分 ——

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\rho = \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\rho - \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\rho + \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\rho - \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \Gamma_{\alpha\sigma}^\rho \quad (3.48)$$

で与えられる。

(3.48) 式から分かるように、等価原理により局所慣性系で  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ ,  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = 0$  とできたとしても、すべてのクリストッフェル記号の微分をゼロにはできない ( $\partial_\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \neq 0$ ) ので、リーマンのテンソルは局所的にも消せない。すなわち、リーマンテンソルは、等価原理により局所的には消せる重力の、それでも残る本質的な部分を記述していると考えられる。

リーマンテンソルの独立成分

$D$  次元時空におけるリーマンテンソルの独立成分について考えよう。リーマンテンソルの対称性 (3.19) 式と (3.21) 式から、 $(a, b)$  と  $(c, d)$  の組について同じものはとれない ( $a \neq b, c \neq d$ )。この対称性から成分の数はただか  $D(D-1)/2! \times D(D-1)/2!$  である。対称性 (3.20) 式の自由度は、 $d$  は自由にとれ、 $abc$  のどれかが同じになることはできないから  $D \times D(D-1)(D-2)/3!$  であり、これが拘束条件となる。したがってリーマンテンソルの独立成分は、

$$\frac{D(D-1)}{2} \times \frac{D(D-1)}{2} - D \times \frac{D(D-1)(D-2)}{3!} = \frac{D^2(D^2-1)}{12} \quad (3.49)$$

となる。4次元時空 ( $D=4$ ) の場合には独立成分の数は20である。

ここで、対称性 (3.34) は対称性 (3.19)–(3.21) から導かれるため、リーマンテンソルの独立成分に関して新たな拘束条件を課すものではないことをもう一度注意しておく。

## 3.A 3章の補足

### 3.A.1 リーマンの曲率テンソルの幾何学的意味

リーマンテンソルは、任意の閉曲線に沿ってあるベクトルを平行移動して元の位置に戻した際に、移動前のベクトルと一致するかどうかという幾何学 (構造) と関連している。例えば球面の場合にはベクトルは元通りにはならないことは容易に想像できるだろう (図 3.1(a) 参照)<sup>\*12</sup>

閉曲線に沿っての平行移動に際して、移動前と後のベクトルが一致しないことにリーマンテンソルが関連していることを具体的に示そう。2次元  $S$  面上に点  $P$  を原点とする座標系  $(t, s)$  を張り、図 3.1(b) に示すような微小閉曲線を考える。 $t$  軸 ( $s$  一定の曲線) の接ベクトルを  $T^a$ 、 $s$  軸 ( $t$  一定の曲線) の接ベクトルを  $X^a$  とする。

点  $p$  でのベクトル (場)  $v^a$  をとり、 $s$  一定の曲線に沿って、点  $p$  から点  $(0, \Delta t)$  まで  $v^a$  を平行移動する<sup>\*13</sup>。いま、任意の双対ベクトル場  $\omega_a$  に対して、スカラー  $v^a \omega_a$  の変化  $\delta_1$  を求めると、 $\Delta t$  の2次のオー

<sup>\*12</sup> 一方、円筒の場合には、閉曲線に沿って移動させると元のベクトルと一致しそうである。この意味で、円筒は「曲がっていない」。

これは、円筒の場合には1枚の紙への展開図が作成可能であるのに対し、球面の場合にはそれができないことから推察できる。

<sup>\*13</sup> この平行移動されたベクトルは  $(0, \Delta t)$  におけるベクトル場  $v^a$  の「値 (ベクトル)」とは異なる。

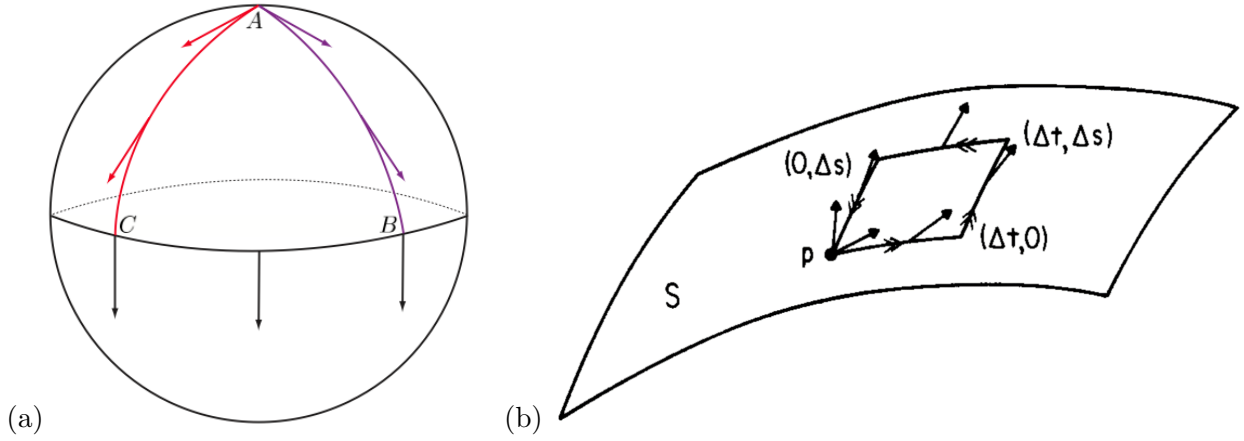


図 3.1 (a) 球面上の閉曲線に沿っての平行移動の結果: 点  $A$  におけるベクトル (紫) を  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$  と閉曲線  $ABC$  に沿って平行移動させると、戻ってきた点  $A$  においてベクトル (赤) となる。これは元のベクトル (紫) とは一致しない。(b) 微小閉曲線に沿ってのベクトル  $v^a$  の平行移動の概略図

ダーの精度で (微分の評価点を中点  $(\Delta t/2, 0)$  にしている)ので 2 次精度になる)、

$$\begin{aligned}\delta_1 &\equiv \Delta t \left[ \frac{\partial}{\partial t} (v^a \omega_a) \right]_{(\Delta t/2, 0)} = \Delta t [T^b \nabla_b (v^a \omega_a)]_{(\Delta t/2, 0)} \\ &= \Delta t [v^a T^b \nabla_b \omega_a]_{(\Delta t/2, 0)}\end{aligned}\quad (3.50)$$

である。最後の等号で  $v^a$  が  $s$  一定の曲線に沿って平行移動されていること ( $T^b \nabla_b v^a = 0$ ) を用いた。

一方、点  $(\Delta t, \Delta s)$  でのベクトル (場)  $v^a$  をとり、 $s$  一定の曲線に沿って、点  $(0, \Delta s)$  まで平行移動させた場合の  $v^a \omega_a$  の変化  $\delta_3$  は、 $\delta_3 = -\Delta t [v^a T^b \nabla_b \omega_a]_{(\Delta t/2, \Delta s)}$  であるから、

$$\delta_1 + \delta_3 = \Delta t \left( [v^a T^b \nabla_b \omega_a]_{(\Delta t/2, 0)} - [v^a T^b \nabla_b \omega_a]_{(\Delta t/2, \Delta s)} \right)\quad (3.51)$$

を得る。

ここで、 $v^a|_{(\Delta t/2, \Delta s)} = v^a|_{(\Delta t/2, 0)} + O(\Delta s)$  であるから\*14、

$$\begin{aligned}\delta_1 + \delta_3 &= \Delta t \left( v^a|_{(\Delta t/2, 0)} + O(\Delta s) \right) \left( [T^b \nabla_b \omega_a]_{(\Delta t/2, 0)} - [T^b \nabla_b \omega_a]_{(\Delta t/2, \Delta s)} \right) \\ &= -\Delta t \left( v^a|_{(\Delta t/2, 0)} + O(\Delta s) \right) \Delta s \left[ \frac{\partial}{\partial s} (T^b \nabla_b \omega_a) \right]_{(\Delta t/2, 0)} \\ &= -\Delta t \Delta s [v^a X^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a)]_{(\Delta t/2, 0)} + O(\Delta t \Delta s^2) \\ &= -\Delta t \Delta s [v^a X^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a)]_{(0, 0)} + O(\Delta t^2 \Delta s) + O(\Delta t \Delta s^2)\end{aligned}\quad (3.52)$$

となる、

同様に、点  $(\Delta t, 0)$  でのベクトル (場)  $v^a$  をとり、 $t$  一定の曲線に沿って、点  $(\Delta t, \Delta s)$  まで平行移動させた場合の  $v^a \omega_a$  の変化を  $\delta_2$ 、点  $(0, \Delta s)$  から  $p$  まで平行移動させた場合の変化を  $\delta_4$  とすれば、

$$\begin{aligned}\delta_2 + \delta_4 &= \Delta s \left( [v^a X^b \nabla_b \omega_a]_{(\Delta t, \Delta s/2)} - [v^a X^b \nabla_b \omega_a]_{(0, \Delta s/2)} \right) \\ &= \Delta t \Delta s [v^a T^c \nabla_c (X^b \nabla_b \omega_a)]_{(0, 0)} + O(\Delta t^2 \Delta s) + O(\Delta t \Delta s^2)\end{aligned}\quad (3.53)$$

である。

\*14 この関係式は、 $v^a$  をベクトル場とみなした場合、平行移動されたベクトルと考えた場合のいずれにおいても成り立つ。

よって、微小閉曲線に沿ってベクトル  $v^a$  を平行移動させたときの  $v^a \omega_a$  の変化は、

$$\begin{aligned}
 \delta(v^a \omega_a) &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 \\
 &= \Delta t \Delta s v^a [T^c \nabla_c (X^b \nabla_b \omega_a) - X^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a)] \\
 &\stackrel{(3.13)}{=} \Delta t \Delta s v^a T^c X^b (\nabla_c \nabla_b - \nabla_b \nabla_c) \omega_a \\
 &= \Delta t \Delta s v^a T^c X^b R_{cba}{}^d \omega_d
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

となる。ここですべての量を点  $P(0, 0)$  で評価している。 $\omega_a$  は任意であったから、これが成り立つための必要十分条件は、

$$\delta v^a = \Delta t \Delta s v^d T^c X^b R_{cbd}{}^a \tag{3.55}$$

である。この結果から、リーマンテンソルが、任意の閉曲線に沿ったベクトルの平行移動における移動前後の変化（という幾何学構造）と関連していることが示せた。

### 3.A.2 リーマンの曲率テンソルの分解

リーマンテンソルは、リッチテンソル、スカラー曲率、及び計量テンソルを用いて表現できる部分と、そうでない部分に分けることができる。リーマンテンソルの対称性から、

$$R_{abcd} = C_{abcd} + A(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) + BRg_{a[c}g_{d]b} \tag{3.56}$$

と表すことができる。 $g^{bd}$  を作用させると、時空の次元を  $D$  として  $g^{ab}g_{ab} = D$  であるから、

$$R_{ac} = \frac{A + (D-1)B}{2} Rg_{ac} + \frac{(D-2)A}{2} R_{ac} \tag{3.57}$$

となるので、

$$A = \frac{2}{D-2}, \quad B = -\frac{2}{(D-1)(D-2)} \tag{3.58}$$

と求まる。したがって、リーマンテンソルの分解は

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{2}{D-2}(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) - \frac{2}{(D-1)(D-2)}Rg_{a[c}g_{d]b} \tag{3.59}$$

となる。

### 3.A.3 ワイルテンソル

(3.59) 式における  $C_{abcd}$  をワイルテンソル (Weyl tensor) あるいは共形テンソル (conformal tensor) と呼ぶ。共形テンソルの名は、ワイルテンソルが共形変換に対して不変であることに由来している。重力に特徴的な長さのスケールが存在しないことを考えれば、“ものさし”の目盛りの変換に相当する共形変換によって、物質によらない純粋な重力部分であるワイルテンソルが不変であることは自然である。

共形変換

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab} \tag{3.60}$$



によって、クリストッフェル記号、リーマンテンソル、リッチテンソル、リッチスカラーはそれぞれ

$$\tilde{\Gamma}^c_{ab} = \Gamma^c_{ab} + \Omega^{-1}(\delta^c_a \nabla_b \Omega + \delta^c_b \nabla_a \Omega - g_{ab} \nabla^c \Omega) \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{abc}{}^d &= R_{abc}{}^d + 2\delta^d_{[a} \nabla_{b]} \nabla_c \ln \Omega - g^{de} g_{c[a} \nabla_{b]} \nabla_e \ln \Omega + 2(\nabla_{[a} \ln \Omega) \delta^d_{b]} \nabla_c \ln \Omega \\ &\quad - 2(\nabla_{[a} \ln \Omega) g_{b]c} g^{df} \nabla_f \ln \Omega - 2g_{c[a} \delta^d_{b]} g^{ef} (\nabla_e \ln \Omega) \nabla_f \Omega \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ac} &= R_{ac} - (D-2) \nabla_a \nabla_c \ln \Omega - g_{ac} g^{de} \nabla_d \nabla_e \ln \Omega \\ &\quad + (D-2) (\nabla_a \ln \Omega) \nabla_c \ln \Omega - (D-2) g_{ac} g^{de} (\nabla_d \ln \Omega) (\nabla_e \ln \Omega) \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} R - \Omega^{-2} [2(D-1) g^{ac} \nabla_a \nabla_c \ln \Omega + (D-2)(D-1) g^{ac} (\nabla_a \ln \Omega) \nabla_c \ln \Omega] \quad (3.64)$$

と変換する。これらを (3.59) 式に入れれば、ワイルテンソルが共形不変であることが示される。

$$\tilde{C}_{abc}{}^d = C_{abc}{}^d \quad (3.65)$$

4章で示すように、アインシュタイン方程式によって物質場の存在から定まる重力場はリッチスカラーとリッチテンソル部分である。すなわち、ワイルテンソルは純粋な重力の情報 (重力波、ブラックホール) を持っており、物質がない真空の場合でも時空の幾何学は Minkowski 時空であるとは限らない<sup>\*15</sup>。

### 3章の問題

1. 3.2 節の議論に従い、測地線偏差の方程式を導出せよ。
2. 3.3 節の議論に従い、リーマンテンソルの対称性を示せ。
3. リーマンテンソルは、任意の閉曲線に沿ってあるベクトルを平行移動して元の位置に戻した際に、移動前のベクトルと一致するかどうかという幾何学的構造を記述するテンソルであることを示せ。
4. 一般相対性理論における Maxwell 方程式は 4 元電流  $\mathcal{J}^a$  を用いて<sup>\*16</sup>、

$$\nabla^b F_{ab} = 4\pi \mathcal{J}_a \quad (3.66)$$

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \quad (3.67)$$

で与えられる<sup>\*17</sup>。

- (a) (3.66) 式より次の電荷保存則を導け

$$\nabla_a \mathcal{J}^a = 0 \quad (3.68)$$

- (b) (3.26) 式を用いることで、ベクトルポテンシャル  $A^b$  によって

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a \quad (3.69)$$

とすれば、(3.67) 式が自動的に満たされることを示せ。さらに、

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a = \partial_a A_b - \partial_b A_a \quad (3.70)$$

となることを示せ。

- (c) クリストッフェル記号の対称性より、任意のスカラー場  $f$  に対して

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f \quad (3.71)$$

\*15 ブラックホール時空はアインシュタイン方程式の真空解である。

\*16 この問題では光速  $c = 1$  の単位系を用いる。

\*17 以下の問題では、特殊相対性理論の場合と異なり、共変微分が交換可能でないことに注意すること。

となることを示し ((2.88) 式参照)、 $F_{ab}$  はゲージ変換

$$A_a \longrightarrow A_a + \nabla_a \chi \quad (3.72)$$

で不変であることを示せ。さらに、ゲージ自由度 (3.72) を用いて Lorenz ゲージ条件

$$\nabla_a A^a = 0 \quad (3.73)$$

を課することができることを示せ。

(d) ローレンスゲージ条件の下で、Maxwell 方程式 (3.66) は

$$\nabla^a \nabla_a A_b - R^a_b A_a = -4\pi \mathcal{J}_b \quad (3.74)$$

となることを示せ\*18。

5. (発展問題)\*19 特殊相対論の場合と同様に、真空中 ( $\mathcal{J}_b = 0$ ) を伝わる電磁波

$$A_b = C_b e^{i\Phi} \quad (3.75)$$

を考える。この場合、 $R^a_b A_a$  項が実効的な電磁波源とみなせるため、振幅  $C_b$  は一定ではない\*20。

(a) いま、電磁波の換算波長  $\lambda = \lambda/(2\pi)$  が、時空の曲率のスケール (曲率半径)  $L$  に比べて十分に短い場合を考える：

$$\epsilon \equiv \frac{\lambda}{L} \ll 1. \quad (3.76)$$

位相  $\Phi$  の変化のスケールは

$$\Phi \sim \frac{\text{波源からの伝播距離}}{\lambda} \sim \frac{1}{\epsilon} \quad (3.77)$$

である。一方、振幅の変化のスケールは

$$C_b = C_b^{(0)} + \epsilon C_b^{(1)} + \epsilon^2 C_b^{(2)} + \dots \quad (3.78)$$

のように展開できることを説明せよ\*21。

(b) 前問の結果より、(3.78) 式は (あとで  $\epsilon = 1$  とみなす展開用の無次元パラメータを用いて)、

$$A_b = (C_b^{(0)} + \epsilon C_b^{(1)} + \epsilon^2 C_b^{(2)} + \dots) e^{i\Phi/\epsilon} \quad (3.79)$$

と表すことができる。これを媒質中の電磁波の場合にならって幾何光学近似と呼ぶ\*22。(3.79)

式を (3.74) 式 ( $\mathcal{J}_b = 0$ ) に代入し、 $\epsilon$  の同じオーダーを比べることで、 $k_a = \nabla_a \Phi$  に対し、

$$k^a k_a = 0 \quad (3.80)$$

$$k^a \nabla_a C_b^{(0)} = -\frac{1}{2} (\nabla_a k^a) C_b^{(0)} \quad (3.81)$$

となることを示せ。(3.80) 式より  $k^a$  はヌルベクトルであることが分かる。

\*18 この結果は、特殊相対論における Maxwell 方程式 (1.38) の偏微分を共変微分に置き換えるだけでは得られない。その原因は、偏微分が交換可能なのに対して、共変微分は交換可能ではなく、共変微分を交換する際にリーマンテンソルが表れるからである。

\*19 この問題では光速  $c = 1$  の単位系を用いる。この問題を通して、曲がった時空で光線がどのように進むのかについての理解が深まるだろう。以下のような例え話は問題点を直感的につかむのに役立つかもしれない。地面はよく見れば凸凹しているが、タイヤの半径がそれよりも十分に大きければタイヤは凸凹を感せず車はまっすぐに進む。一方、ミクロのタイヤを持つミクロの車は凸凹に沿ってくねくねと進む。さて、時空の曲がり (のスケール) と光 (の波長) の場合にはどうなるであろうか?

\*20 数学的状況は媒質中を伝わる電磁波と同様である。

\*21 略解: 振幅に  $\epsilon$  の高次の項が表れるのは、実効的ソース項  $R^a_b A_a$  に  $A_a$  が含まれているためである。例えば、 $A_a \sim C_b^{(0)} + \epsilon C_b^{(1)} + \epsilon^2 C_b^{(2)}$  としても、 $R^a_b A_a$  は  $R^a_b \sim \epsilon^2$  と  $\epsilon C_b^{(1)}$  の結合により  $\epsilon^3$  の項を含む。これと釣り合う項が左辺にも必要である。これを繰り返していけば、振幅について (3.78) 式のような  $\epsilon$  についての展開式が得られるはずである。

\*22 誘電率  $\epsilon$  の空間変化が電磁波の波長に比べて十分短い場合に適用可能。

(c) (3.80) 式を微分することにより、幾何光学近似の下で  $k^a$  が測地線方程式

$$k^a \nabla_a k^b = 0 \quad (3.82)$$

に従うことを示せ。

(d) 振幅ベクトル  $C_b^{(0)}$  をその大きさ  $C^{(0)} \equiv \sqrt{g^{ab} C_a^{(0)} C_b^{(0)*}}$  と単位偏光ベクトル  $e_b$  に分ける<sup>\*23</sup> :

$$C_b^{(0)} = C^{(0)} e_b \quad (3.83)$$

(3.81) 式を用いて

$$2C^{(0)} k^a \nabla_a C^{(0)} = k^a \nabla_a \left( g^{bc} C_b^{(0)} C_c^{(0)*} \right) \quad (3.84)$$

を計算し、

$$k^a \nabla_a C^{(0)} = -\frac{1}{2} (\nabla_a k^a) C^{(0)} \quad (3.85)$$

を示せ。この結果と (3.81) 式を用いて

$$k^a \nabla_a e^b = 0 \quad (3.86)$$

を示せ。すなわち、偏光ベクトル  $e^b$  は伝播方向に平行移動されることが分かる。

(e) (3.79) 式をローレンス条件 (3.73) に代入し、

$$k^a e_a = 0 \quad (3.87)$$

であることを示せ。すなわち偏光ベクトルは伝播方向  $k^a$  に直交している。前問の結果 (3.86) より、この直交条件は電磁波の伝播に伴って保存されることを説明せよ<sup>\*24</sup>。

\*23  $C_a^{(0)*}$  は  $C_a^{(0)}$  の複素共役。一般に振幅は複素数であることに注意。

\*24 略解: (3.82), (3.86) 式より、 $k^a$ ,  $e^a$  は伝播方向に平行移動される。いま、共変微分は平行移動に伴って内積を保つように選ばれているので (2.8.3 節参照)、直交条件は保存される。尚、 $k^a$  がヌルベクトルであること ( $k^a k_a = 0$ ) も保存されることを注意しておく。



## 第 4 章

# アインシュタイン方程式

本章でいよいよアインシュタイン方程式 (Einstein equation) を”導出”する。一般相対性原理を満たすためには、重力の源となる (物質) 場もテンソル形式で表現しておかなければならない。また、導くべきアインシュタイン方程式は

$$\text{時空の幾何学} = \text{物質場の存在}$$

の形をとると推測される。アインシュタイン方程式を導出する方法には、いろいろなやり方が考えられるが、ここでは変分原理による導出について解説する。アインシュタインが初めにたどり着いたであろう考え方は、本章の最後に触れる。導出されたアインシュタイン方程式は、重力の弱い極限でニュートン重力理論を再現しなければならない。そのために必要な数学と、実際にニュートン重力理論と整合的であることも本章で解説する。

### 4.1 物質場の作用

アインシュタイン方程式を変分原理で導出するために、物質場の例としてスカラー場を考える。

#### 4.1.1 平坦な時空における運動方程式

スカラー場のラグランジアン密度 (Lagrangian density) は特殊相対性理論において

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \left( \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2 \right) \quad (4.1)$$

となるが、これはローレンツ変換に対してスカラーである。以下において、スカラー場の記述には自然単位系 ( $\hbar = c = 1$ ) を用いることにする。

ラグランジアンはこれを体積積分して

$$L_\phi = \int dV_3 \mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \int (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2) dV_3, \quad (4.2)$$

作用汎関数はさらに時間積分して

$$S_\phi = c_\phi \int cdt L_\phi = c_\phi \int (cdt) dV_3 \mathcal{L}_\phi = -\frac{c_\phi}{2} \int (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2) dV_4, \quad (4.3)$$

ここで新たに導入された  $c_\phi$  は、重力場も考慮した際に必要となる定数係数である\*1。また、 $dV_3$ 、 $dV_4$  はそれぞれ 3 次元および 4 次元の体積要素であり、特殊相対性理論におけるミンコフスキー時空では、デカルト

\*1 相互作用のないスカラー場の運動方程式を導く際には  $c_\phi$  の具体的な値は必要ない。

座標において

$$dV_3 = dx^1 dx^2 dx^3 = dx dx y dz \quad (4.4)$$

$$dV_4 = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = (cdt) dx dx y dz \quad (4.5)$$

である

スカラー場に対する変分をとれば、 $\partial_\mu \delta\phi = \delta\partial_\mu \phi$  に注意して、

$$\begin{aligned} \delta S_\phi &= - \int [\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \delta(\partial_\nu \phi) + m^2 \phi (\delta\phi)] dV_4 \\ &= - \int [\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu (\delta\phi) + m^2 \phi (\delta\phi)] dV_4 \\ &= - \int [\partial_\nu (\eta^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi) (\delta\phi)) - \partial_\nu (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi) (\delta\phi) + m^2 \phi (\delta\phi)] dV_4 \\ &= \int [\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi] \delta\phi dV_4 + \text{surface terms} \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる。ここで境界で  $\delta\phi = 0$  であるとすれば、

$$\begin{aligned} \text{surface terms} &= -c_\phi \int \partial_\nu (\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi (\delta\phi)) dV_4 = -c_\phi \int \left[ -\partial_t ((\partial_t \phi) \delta\phi) + \partial_i ((\partial^i \phi) \delta\phi) \right] dV_4 \\ &= +c_\phi \int dV_3 \int_{t_i}^{t_f} dt \partial_t ((\partial_t \phi) \delta\phi) - c_\phi \int dt \int dV_3 \partial_i ((\partial^i \phi) \delta\phi) \\ &= +c_\phi \int dV_3 [(\partial_t \phi) \delta\phi]_{t_i}^{t_f} - c_\phi \int dt \int dS_i (\partial^i \phi) \delta\phi \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

となる。よって、 $\delta S_\phi = 0$  より運動方程式を得る。

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = 0 \quad (4.8)$$

これは、クラインゴルドン方程式 (Klein-Gordon equation) と呼ばれる。

#### 4.1.2 一般相対論への拡張

(4.1) 式で与えられたスカラー場のラグランジアン密度を一般座標変換に対してスカラーであるように拡張すれば、一般相対性理論におけるスカラー場の作用汎関数は以下で与えられるであろう。

$$S_\phi = -\frac{c_\phi}{2} \int (g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi + m^2 \phi^2) dV_4, \quad (4.9)$$

ここで、時空が歪んでいるため 4 次元体積要素も変更が必要である。(固有) 体積要素は座標変換に対して

$$dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 = \det \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (4.10)$$

と与えられる。ここで  $J = \det \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|$  は座標変換のヤコビアンである。

一方、計量テンソルの成分の変換則

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g'_{\alpha\beta} \quad (4.11)$$

において両辺の行列式をとることで、

$$-g \equiv -\det(g_{\mu\nu}) = \left[ \det \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \right]^2 (-g'), \quad (4.12)$$

これより

$$\det \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g'}} \quad (4.13)$$

となるので、(4.10) 式に代入すると、

$$\sqrt{-g'} dx'^0 dx'^1 dx'^2 dx'^3 = \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (4.14)$$

となるので\*2、これは

— 不変体積要素 —

$$dV_4 \equiv \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (4.15)$$

が座標変換によって変わらない不変体積要素であることが分かる。

Minkowski 時空の場合と同様に  $\phi$  による変分 ( $\delta_\phi S$ ) から、曲がった時空におけるクラインゴールドン方程式が得られる\*3。

$$\delta_\phi S_\phi = 0 \longrightarrow \nabla_\mu \nabla^\mu \phi - m^2 \phi = 0 \quad (4.16)$$

同様に、真空中の電磁場の作用汎関数 (ガウス単位系) は

$$S_{EM} = c_{EM} \int \mathcal{L}_{EM} \sqrt{-g} d^4x, \\ \mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} g^{ac} g^{bd} F_{ab} F_{cd}, \quad F_{ab} = 2\nabla_{[a} A_{b]} = 2\partial_{[a} A_{b]} \quad (4.17)$$

で与えられる\*4。ベクトルポテンシャル  $A_a$  に関する変分を取れば\*5、Maxwell 方程式 (ガウスの法則、アンペールの法則)

$$\nabla_a F^{ab} = 0 \quad (4.19)$$

を得る\*6。一方、 $F_{ab} = 2\nabla_{[a} A_{b]}$  に対して恒等的に成り立つ

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \quad (4.20)$$

から残りの Maxwell 方程式 (モノポール無し条件、ファラデーの法則) が得られる\*7。

\*2 計量テンソルが対角化された基底で考えると直感的に理解しやすい。この基底では

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2$$

固有体積要素の各辺は固有長さ ( $dl^i = \sqrt{|g_{ii}|} dx^i$  ( $i$  についての和はとらない)) で測られるべきであるから、固有体積要素は

$$dV_4 = dl^0 dl^1 dl^2 dl^3 = \sqrt{-g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{-g} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

となる。

\*3  $\nabla_\mu \delta\phi = \delta\nabla_\mu \phi$  に注意せよ。

\*4 ここでは  $F_{ab}$  ではなく  $A_a$  を電磁場の基本量としている。

\*5 オイラーラグランジュ方程式を用いるのではなく、次のような変分計算から導けるようになっておくことが望ましい。

$$\begin{aligned} \delta_A S_{EM} &= -\frac{c_{EM}}{4} \int \delta(F_{ab} F^{ab}) d^4V = -\frac{c_{EM}}{2} \int \delta(F_{ab}) F^{ab} d^4V \\ &= -\frac{c_{EM}}{2} \int (\nabla_a \delta A_b - \nabla_b \delta A_a) F^{ab} d^4V = -c_{EM} \int (\nabla_a \delta A_b) F^{ab} d^4V \\ &= -c_{EM} \int \delta A_b \nabla_a F^{ab} d^4V + \text{surface terms} \end{aligned} \quad (4.18)$$

\*6 平坦な時空の場合に  $F^{ab}$  の具体形を当てはめれば、(真空中における) ガウスの法則とアンペールの法則が得られる。

\*7  $\nabla_{[a} F_{bc]} = 0$  が恒等式であることから分かるように、モノポール無し条件、ファラデーの法則は電荷や電流の存在と電磁場を関係づけるものではない。実際、それらはスカラーポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $A$  の存在を示すものであった (物理学 C・D の講義ノート参照)。

### 4.1.3 エネルギー運動量テンソル

曲がった時空における物質場の作用には物質を記述する基本場だけではなく重力場 ( $g_{ab}$ ) も現れるので、 $g_{ab}$  に関する変分を考える。そのために、まず  $\sqrt{-g}$  の変分を考えよう。

行列の一般理論から、計量テンソルの行列式の変分は

$$\delta(-g) = (-g)g_{ab}\delta g^{ab} \quad (4.21)$$

となることが示せる\*8。従って、

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ab}\delta g^{ab} \quad (4.26)$$

である。ここで、様々な利便性を考慮して、 $g_{ab}$  ではなく  $g^{ab}$  に関する変分で計量テンソルの行列式の変分を評価した。 $g^{ac}g_{cb} = \delta_b^a$  より

$$\delta g_{ab} = -g_{ac}g_{bd}\delta g^{cd} \quad (4.27)$$

である。ここで符号に注意すること。

#### スカラー場のエネルギー運動量テンソル

スカラー場の作用 (4.9) の  $g^{ab}$  に関する変分をとれば

$$\begin{aligned} \delta_g S_\phi &= -\frac{c_\phi}{2} \int \left[ \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} (\nabla_c \phi \nabla^c \phi + m^2 \phi^2) \right] \delta g^{ab} \sqrt{-g} d^4 x \\ &\equiv - \int T_{ab} \delta g^{ab} \sqrt{-g} d^4 x \end{aligned} \quad (4.28)$$

を得る。ここで、スカラー場に対して  $T_{ab}$  を

$$\begin{aligned} T_{ab} &= \frac{c_\phi}{2} \left[ \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} (\nabla_c \phi \nabla^c \phi + m^2 \phi^2) \right] \\ &= \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} (\nabla_c \phi \nabla^c \phi + m^2 \phi^2) \end{aligned} \quad (4.29)$$

で定義した。定数係数  $c_\phi$  はアインシュタイン方程式とスカラー場の理論との整合性から決まり、スカラー場の場合は  $c_\phi = 2$  である\*9。

\*8 行列  $A = a_{ij}$  の逆行列  $B = b^{ij}$  は  $A$  の余因子行列 (線形代数の教科書でその定義を確認すること)  $\tilde{A} = \tilde{a}^{ij}$  と  $A$  の行列式  $\det A = a$  によって、

$$B = b^{ij} = \frac{1}{a} \tilde{a}^{ji} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T \quad (4.22)$$

であたえられる。これより  $ab^{ji} = \tilde{a}^{ij}$  において  $b^{ij}$  が  $A$  の逆行列であることに注意すると  $a\delta_k^i = a a_{kj} b^{ji} = a_{kj} \tilde{a}^{ij}$  を得る。ここで  $k = i$  として

$$a = a_{ij} \tilde{a}^{ij} \quad (4.23)$$

となる。ここで添字  $j$  については和をとるが、 $i$  に対しては和を取らないことに注意。行列式  $a$  を行列  $a_{ij}$  の関数とみなし、行列  $a_{ij}$  を  $x^k$  の関数とすると、

$$\frac{\partial a}{\partial x^k} = \frac{\partial a}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} \quad (4.24)$$

となる。

(4.23) 式において  $\tilde{a}^{ij}$  が  $a_{ij}$  を含まないことに注意すれば (余因子の定義からわかる)、

$$\frac{\partial a}{\partial x^k} = \tilde{a}^{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = ab^{ji} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}. \quad (4.25)$$

ここで  $a \rightarrow -g$ ,  $a_{ij} \rightarrow g^{ab}$ ,  $b^{ij} \rightarrow g_{ab}$  として、偏微分  $\partial_k$  を変分  $\delta$  に代えて同じ導出をすれば (4.21) 式が得られる。

\*9 係数  $c_\phi$  はラグランジアンとの与え方やエネルギー運動量テンソルの「形式的な」定義によって変わりうる。すなわち、定義に応じて、スカラー場のエネルギー運動量テンソルが (4.29) 式で与えられるように決定される。



スカラー場のラグランジアン<sup>10</sup>の計量テンソルに対する変分から得られた  $T_{ab}$  をエネルギー-運動量ストレステンソル (energy-momentum-stress tensor) あるいは省略してエネルギー-運動量テンソル、ストレスエネルギーテンソルと呼ぶ。

エネルギー-運動量テンソルの一般的定義

スカラー場だけではなく、より一般に、物質場の作用  $S_M$  の計量テンソルによる変分によってエネルギー-運動量テンソルを定義する。すなわち、

$$\begin{aligned}\delta_g S_M &= \delta_g \left( c_M \int dx^4 \sqrt{-g} \mathcal{L}_M \right) = c_M \int dx^4 \left[ \delta_g(\sqrt{-g}) \mathcal{L}_M + \sqrt{-g} \delta_g(\mathcal{L}_M) \right] \\ &= c_M \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g^{ab} \left[ -\frac{1}{2} g_{ab} \mathcal{L}_M + \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{ab}} \right] \\ &\equiv - \int \sqrt{-g} dx^4 \delta g^{ab} T_{ab}\end{aligned}\tag{4.30}$$

より、物質場のラグランジアン密度  $\mathcal{L}_M$  を用いて、そのエネルギー-運動量テンソルは、

物質場  $\mathcal{L}_M$  のエネルギー-運動量テンソル

$$T_{ab} = c_M \left( \frac{1}{2} g_{ab} \mathcal{L}_M - \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{ab}} \right)\tag{4.31}$$

で与えられる<sup>\*10</sup>

定義から分かるように、 $T_{ab}$  はテンソルであり、また添字  $a, b$  に対して対称であることに注意しよう。

電磁場のエネルギー-運動量テンソル

電磁場に対しては、

$$\begin{aligned}\delta_g S_{EM} &= -\frac{c_{EM}}{4} \int F_{ac} F_{bd} \delta(g^{ab} g^{cd} \sqrt{-g}) d^4 x \\ &= -\frac{c_{EM}}{4} \int F_{ac} F_{bd} \left[ (\delta g^{ab}) g^{cd} \sqrt{-g} + g^{ab} (\delta g^{cd}) \sqrt{-g} + g^{ab} g^{cd} \left( -\frac{1}{2} g_{ef} \sqrt{-g} \delta g^{ef} \right) \right] d^4 x \\ &= -\frac{c_{EM}}{4} \int \left[ F_{ac} F_b{}^c + F_a{}^c F_{cb} - \frac{1}{2} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \right] \delta g^{ab} \sqrt{-g} d^4 x\end{aligned}\tag{4.32}$$

より、 $c_{EM} = 1/2\pi$  と選んで、

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left[ F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd} \right].\tag{4.33}$$

で与えられる。

完全流体のエネルギー-運動量テンソル

完全流体 (粘性・熱流なし流体; perfect fluid) のラグランジアン密度は静止質量密度 (rest-mass density)  $\rho$ 、単位質量あたりの内部エネルギー (specific internal energy)  $\epsilon$  を用いて

$$\mathcal{L}_{PF} = -\rho(1 + \epsilon)\tag{4.34}$$

である。その計量テンソルに対する変分より、

<sup>\*10</sup> スカラー場の場合と同様に、 $c_M$  はアインシュタイン方程式等との整合性から決まる定数である。

## 完全流体のエネルギー運動量ストレステンソル

$$T_{ab} = \rho \left( 1 + \epsilon + \frac{P}{\rho} \right) u_a u_b + g_{ab} P \quad (4.35)$$

が得られる<sup>\*11</sup>。完全流体は天体現象に現れる物質場をよく記述するので応用面において極めて重要である。

## 4.2 重力場の作用

## 4.2.1 アインシュタイン-ヒルベルト作用

1章において Newton 理論では”力”であった重力は、時空の幾何学  $g_{ab}$  へと昇華され、3章において、重力場の本質を記述するのはリーマンテンソルであることを議論した。そこで、一般相対性理論における作用汎関数を考えるために、計量テンソルとリーマンテンソルからつくられ、一般座標変換に対してスカラーとして振る舞う組を列挙すると<sup>\*12</sup>、

$$R, R_{ab}R^{ab}, R_{abcd}R^{abcd}, F(R), H(R_{ab}R^{ab}), L(R_{abcd}R^{abcd}). \quad (4.36)$$

ここで  $F(x), H(x), L(x)$  は  $x$  に関する任意の正則関数である。

Newton 重力理論における重力場の方程式 (ポアソン方程式) が重力ポテンシャルに対して 2 階の微分方程式であったことを考慮して、一般相対性理論においても、基礎方程式は計量テンソルの 2 階微分までしか含まないと仮定してみよう<sup>\*13</sup>。この場合、 $R, R_{ab}, R_{abcd}$  の高次の作用関数 ( $R^2, R_{ab}R^{ab}$  など) は  $(\partial\partial g)(\partial\partial g)$  のような項を含み、その部分積分から計量テンソルの高階微分の項  $(\partial\partial\partial\partial g)$  が出てくる可能性がある。そこで、もっともシンプルな

## アインシュタイン-ヒルベルト作用 (Einstein-Hilbert action)

$$S_G = c_G \int R dV_4 = c_G \int g^{ab} R_{ab} \sqrt{-g} d^4x \quad (4.37)$$

について調べることにする<sup>\*14</sup>。これをアインシュタイン-ヒルベルト作用 (Einstein-Hilbert action) と呼ぶ<sup>\*15</sup>。

<sup>\*11</sup> 導出は (この講義ノートのレベルより) だいぶ難しい。興味があれば Hawking, S. W. and Ellis, G. F. (1973) "The large scale structure of space-time", pp.69 を参照

<sup>\*12</sup> 一般相対性理論におけるゲージ変換は一般座標変換であり、ラグランジアン (密度) はこのゲージ変換に対してスカラーでなければならない (ニュートン理論ではガリレイ変換についてスカラー、特殊相対性理論ではローレンツスカラーである必要がある)。この条件は理論を大きく制限する。物理数学で学んだように、ラグランジュ形式の一つの利点はその定式化が座標系に依らないこと (共変性) であったが、もう一つの大きな利点は、基礎方程式を得るのが難しい場合でも、上記の理論が持つべき対称性といくつかの物理的考察と要請によって、ラグランジアンの形を制限できることである。一般相対論の場合、物理的にリーマンテンソルが重力の本質と関わっていると考えられること、 $\nabla_a g_{bc} = 0$  より計量の微分から意味のあるスカラーを作ることは一般に難しいことなどを更に考慮してラグランジアン (密度) の形を制限することができる。

<sup>\*13</sup> この仮定の結果得られる理論が有望そうでなければ、異なる仮定から新たな理論を導き、有望そうであれば、観測によるテスト・新たな現象の予言など、次のステップへと進めばよい。

<sup>\*14</sup>  $c_G = \kappa \frac{c^3}{G}$  とおける。 $\kappa$  は無次元の定数。ここで因子  $c^3/G$  は右辺が作用 (sec-erg) の次元を持つことから決まる。ここでは時間積分に  $dx^0 = cdt$  を用いていることに注意 (積分を  $d^4x = cdt d^3x$  から  $dt d^3x$  にすると  $c$  のべきが変わる)。この点は教科書によって違う場合があるので注意が必要。

<sup>\*15</sup> アインシュタイン-ヒルベルト作用に基づく重力理論が観測や実験と整合しなければ別の作用 (理論) を模索することになる。

## 4.2.2 アインシュタイン方程式の導出

作用汎関数の変分により

$$\delta_g S_G = c_G \int [R_{ab} \delta g^{ab} \sqrt{-g} + g^{ab} \delta R_{ab} \sqrt{-g} + g^{ab} R_{ab} \delta(\sqrt{-g})] d^4x. \quad (4.38)$$

ここで、右辺第1項はすでに  $\delta g^{ab}$  に関する項となっている。また、右辺第3項については(4.26)式で計算済みである<sup>\*16</sup>。よって、右辺2項について考える。

リッチテンソルの変分は、変分された計量テンソル  $\bar{g}_{ab} = g_{ab} + \delta g_{ab}$  に対するリッチテンソル  $\bar{R}_{ab}$  と  $R_{ab}$  との差

$$\delta R_{ab} = \bar{R}_{ab} - R_{ab} \quad (4.43)$$

である。これを計算するために、リーマンテンソルの変分

$$\delta R_{abc}{}^d = \bar{R}_{abc}{}^d - R_{abc}{}^d \quad (4.44)$$

を考える。ここで、 $\bar{R}_{abc}{}^d$  は変分された計量テンソル  $\bar{g}_{ab}$  に対するリーマンテンソルである。

リーマンテンソルを成分表示してを考える。変分された計量テンソル  $\bar{g}_{ab}$  に対するクリストッフェル記号を  $\bar{\Gamma}^\rho{}_{\alpha\beta}$  として、クリストッフェル記号の変分を

$$\delta \Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} \equiv \bar{\Gamma}^\rho{}_{\alpha\beta} - \Gamma^\rho{}_{\alpha\beta} \quad (4.45)$$

で導入すると、(3.48)式より、

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^\rho &= \partial_\beta \bar{\Gamma}^\rho{}_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha \bar{\Gamma}^\rho{}_{\beta\gamma} + \bar{\Gamma}^\sigma{}_{\alpha\gamma} \bar{\Gamma}^\rho{}_{\beta\sigma} - \bar{\Gamma}^\sigma{}_{\beta\gamma} \bar{\Gamma}^\rho{}_{\alpha\sigma} \\ &= \partial_\beta (\Gamma^\rho{}_{\alpha\gamma} + \delta\Gamma^\rho{}_{\alpha\gamma}) - \partial_\alpha (\Gamma^\rho{}_{\beta\gamma} + \delta\Gamma^\rho{}_{\beta\gamma}) \\ &\quad + (\Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma} + \delta\Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma}) (\Gamma^\rho{}_{\beta\sigma} + \delta\Gamma^\rho{}_{\beta\sigma}) - (\Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma} + \delta\Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma}) (\Gamma^\rho{}_{\alpha\sigma} + \delta\Gamma^\rho{}_{\alpha\sigma}) \\ &\approx \partial_\beta (\Gamma^\rho{}_{\alpha\gamma} + \delta\Gamma^\rho{}_{\alpha\gamma}) - \partial_\alpha (\Gamma^\rho{}_{\beta\gamma} + \delta\Gamma^\rho{}_{\beta\gamma}) \\ &\quad + \left( \Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma} \Gamma^\rho{}_{\beta\sigma} + \Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma} \delta\Gamma^\rho{}_{\beta\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\beta\sigma} \delta\Gamma^\sigma{}_{\alpha\gamma} \right) - \left( \Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma} \Gamma^\rho{}_{\alpha\sigma} + \Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma} \delta\Gamma^\rho{}_{\alpha\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\alpha\sigma} \delta\Gamma^\sigma{}_{\beta\gamma} \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

<sup>\*16</sup>(4.26)式の際とは別の証明を与えておこう。任意の行列  $A$  の行列式とトレースの間に成り立つ関係式

$$\ln(\det A) = \text{Tr}(\ln A) \quad (4.39)$$

の両辺の変分を取ると

$$\frac{\delta(\det A)}{\det A} = \text{Tr}(A^{-1}\delta A) \quad (4.40)$$

ここでトレースの性質  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$  より、右辺の行列の積の順序を気にする必要はない。計量テンソルの成分に適用すると、

$$\delta g = g(g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}) = -g(g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}) \quad (4.41)$$

よって

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad (4.42)$$

尚、一度くらいは行列関数の微分について調べてみることにしよう。

ここで、 $\delta_g S_G$  の計算では変分の1次までを考慮するので、変分の2次以上の項を無視した。よって、

$$\begin{aligned}
\delta R_{\alpha\beta\gamma}{}^\rho &= \partial_\beta \delta \Gamma^\rho_{\alpha\gamma} - \partial_\alpha \delta \Gamma^\rho_{\beta\gamma} + \left( \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} \delta \Gamma^\rho_{\beta\sigma} + \Gamma^\rho_{\beta\sigma} \delta \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} \right) - \left( \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} \delta \Gamma^\rho_{\alpha\sigma} + \Gamma^\rho_{\alpha\sigma} \delta \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} \right) \\
&= \left( \partial_\beta \delta \Gamma^\rho_{\alpha\gamma} + \Gamma^\rho_{\beta\sigma} \delta \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} - \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} \Gamma^\rho_{\alpha\sigma} \right) - \left( \partial_\alpha \delta \Gamma^\rho_{\beta\gamma} + \Gamma^\rho_{\alpha\sigma} \delta \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} - \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} \Gamma^\rho_{\beta\sigma} \right) \\
&= \left( \partial_\beta \delta \Gamma^\rho_{\alpha\gamma} + \Gamma^\rho_{\beta\sigma} \delta \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} - \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} \Gamma^\rho_{\alpha\sigma} \right) - \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} \delta \Gamma^\rho_{\gamma\sigma} \\
&\quad - \left( \partial_\alpha \delta \Gamma^\rho_{\beta\gamma} + \Gamma^\rho_{\alpha\sigma} \delta \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} - \Gamma^\sigma_{\alpha\gamma} \Gamma^\rho_{\beta\sigma} \right) + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \delta \Gamma^\rho_{\gamma\sigma} \\
&= \nabla_\beta \delta \Gamma^\rho_{\alpha\gamma} - \nabla_\alpha \delta \Gamma^\rho_{\beta\gamma}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

ここで、2.8.1節、2.A.3節で注意したように、クリストッフェル記号の差  $\delta \Gamma^c_{ab}$  がテンソルであることを用いて、共変微分を用いてあらわした<sup>\*17</sup>。

縮約はテンソル式に対していつでもとれるから、(4.47)式より

$$\delta R_{ac} = \nabla_b (\delta \Gamma^b_{ac}) - \nabla_a (\delta \Gamma^b_{bc}). \tag{4.51}$$

結局、(4.38)式は、

$$\begin{aligned}
\delta_g S_G &= c_G \int \left[ R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right] \delta g^{ab} dV_4 + c_G \int \left[ \nabla_c (g^{ab} \delta \Gamma^c_{ab}) - \nabla_b (g^{ab} \delta \Gamma^c_{ac}) \right] dV_4 \\
&= c_G \int \left[ R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \right] \delta g^{ab} dV_4
\end{aligned} \tag{4.52}$$

ここで、右辺第2項の積分は表面積分となって落ちるので<sup>\*18</sup>、重力場の方程式には寄与しないことに注意。

結局、重力場と物質場を合わせた作用汎関数の重力の変分から、次のアインシュタイン方程式 (Einstein equation) が得られる。ここで、係数  $8\pi(G/c^4)$  は重力が弱い極限で Newton 理論を再現するという要請から決まる (4.A.1節参照)。

————— アインシュタイン方程式 (Einstein equation) —————

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab} \tag{4.54}$$

アインシュタイン方程式の両辺の縮約をとると  $-R = (8\pi G/c^4)T$  であるから、アインシュタイン方程式は

<sup>\*17</sup> この結果は次のようにしても求められる。2.A.2節で導入した測地線座標では、

$$R^a{}_{bcd} \doteq \partial_c \Gamma^a{}_{bd} - \partial_d \Gamma^a{}_{bc} \tag{4.48}$$

であるが、測地線座標では偏微分は共変微分と局所的に等価なので、結局、

$$\begin{aligned}
\delta R^a{}_{bcd} &\doteq \partial_c (\delta \Gamma^a{}_{bd}) - \partial_d (\delta \Gamma^a{}_{bc}) \\
&\doteq \nabla_c (\delta \Gamma^a{}_{bd}) - \nabla_d (\delta \Gamma^a{}_{bc}).
\end{aligned} \tag{4.49}$$

今、 $\delta \Gamma^c_{ab}$  はテンソルであるので、(4.49)式はテンソル式である。今の場合、テンソル式で表されていればその表式は座標系によらないので、

$$\delta R^a{}_{bcd} = \nabla_c (\delta \Gamma^a{}_{bd}) - \nabla_d (\delta \Gamma^a{}_{bc}). \tag{4.50}$$

<sup>\*18</sup> ベクトルの共変微分による発散

$$\nabla_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} V^\mu}{\partial x^\mu} \tag{4.53}$$

の形をしている。代入するとガウスの定理が使える形になる ((4.93)式参照)。

— アインシュタイン方程式 (2) —

$$R_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right) \quad (4.55)$$

とも書き換えることができる。この形のアインシュタイン方程式もしばしば用いられる

以下では特に断りのない限り  $c = 1$  とする。

## 4.3 対称性と保存則

### 4.3.1 数学的準備：リー微分

2.7 節において、時空 (多様体) に接続係数という構造を導入して、それによって点  $Q$  におけるテンソルを点  $P$  まで「移動」して比べることを可能にし、テンソル場の微分 (共変微分) を定義した。実は、何ら構造を導入することなく「微分」を定義すること (=異なる 2 点でのテンソルを比べること) は可能であり、ここでは点変換の概念を用いたリー微分 (Lie 微分, Lie derivative) について説明する。

そのためには、「変換」には 2 つの考え方があることを理解しなければならない<sup>\*19</sup>。これまで考えてきた座標変換は、観測者の変換、すなわちある点近傍における座標の張り方の違いであり、同一点  $P$  の表し方や同一点におけるベクトルの成分の違いであった。これを受動的変換 (passive transformation (coordinate transformation)) と呼ぶ。一方、点そのものを動かすという変換を考えることも可能である。これを能動的変換 (点変換, active transformation (point transformation)) と呼ぶ<sup>\*20</sup>。

回転変換に対する 2 つの考え方

2 次元空間のあるベクトル  $V$  が与えられたとき<sup>\*21</sup>、その角度  $\theta$  の回転変換を考えよう<sup>\*22</sup>。ここで、「回転変換」には次の 2 種類があることに注意しよう<sup>\*23</sup>。

1.  $V$  はそのままにしておいて、座標系 (観測者) を回転する<sup>\*24</sup> (図 4.1(a) 参照)。
2. 座標系 (観測者) はそのままにしておいて、 $V$  (物理法則あるいは物理系) を回転する<sup>\*25</sup> (図 4.1(b) 参照)。

この 2 つの回転それぞれの場合について、ベクトル  $V$ 、 $V$  のデカルト座標における成分  $V^x$ 、 $V^y$ 、およびベクトルの座標基底がどのように変換されるかを考える。

<sup>\*19</sup> 回転変換を例とした解説については物理数学 C・D の講義ノートあるいは以下に示すその抜粋を参照。

<sup>\*20</sup> 能動的変換 (点変換) と受動的変換 (座標変換) は見方の違いに過ぎず、互いにまったくの等価であると説明している文献も多い。確かに座標系が自然に導入されている通常の空間における (微小) 線形変換においてはそうである。しかし、能動的変換 (点変換) が座標系を導入することなく、幾何学的に定義できる概念 (群構造をなす) であるのに対し、受動的変換 (座標変換) の定義には座標系の導入が不可欠であるという違いがある。また、点変換による対称性は、座標系を導入することなく定義できるという意味で、時空そのものに備わっている幾何学的な属性という意味合いが濃い (と思う)。

<sup>\*21</sup> このベクトル  $V$  は必ずしも幾何学的な (矢印) ベクトルでなくてもよい。例えばニュートンの運動方程式やマクスウェル方程式はベクトル方程式であるから、これらの物理法則もいわば「ベクトル」であると言える。

<sup>\*22</sup> ベクトル  $V$  が幾何学的な矢印であれば単にそれを回転する操作であるが、 $V$  がベクトル方程式で表される物理法則であれば、物理法則を「回転」させることになる。

<sup>\*23</sup> 回転変換に限らず、より一般の変換の場合にも、座標系の変換と物理系の変換の 2 種類を考えることができる。

<sup>\*24</sup> ベクトル  $V$  が物理法則だとすると、これはガリレイ変換やローレンツ変換など、観測者による物理法則の「見方の違い」に相当する。もちろん、「見方」は異なれど、物理法則 (ベクトル  $V$ ) は不変であるべきであろう。

<sup>\*25</sup> 解析力学で学んだように、このタイプの変換の概念は物理系の対称性と関連している。例えば、「回転変換」によって物理系 (今の場合にはラグランジアン  $L$ ) が不変であったとしよう (回転対称性を持つという)。これは、回転によって変わらないもの、すなわち保存量があることを示唆する。そして、その保存量は角運動量であった。

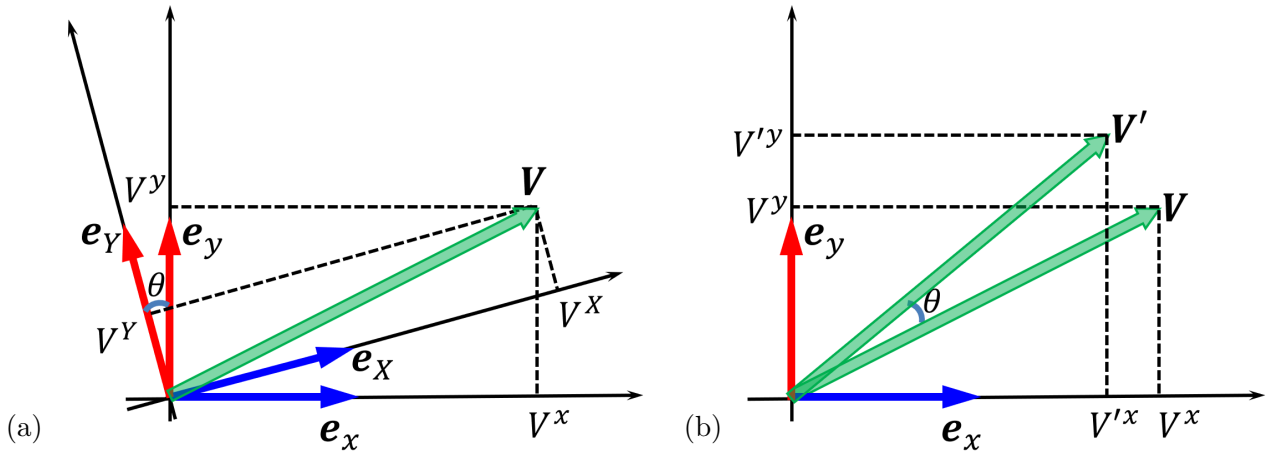


図 4.1 (a) 座標系の回転と (b) 物理系の回転の概念図。座標系の回転 (a) では、ベクトルの座標基底 (観測者の観測の仕方) が変換されるとともに、ベクトルの成分 (観測者が知る値) も変更を受けるが、ベクトルそのものは不変である。物理系の回転 (b) では、観測者系は不変であり、ベクトル (物理系、世界) を回転させる。

#### 座標系の回転

定義よりベクトル  $V$  は不変である。基底ベクトルは

$$e_X = e_x \cos \theta + e_y \sin \theta, \quad e_Y = -e_x \sin \theta + e_y \cos \theta \quad (4.56)$$

のように変換する。すなわち

$$\begin{pmatrix} e_X \\ e_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

である。基底ベクトルを横ベクトルの組に取れば、

$$(e_X \ e_Y) = (e_x \ e_y) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

となる。ここで、ベクトル  $V$  が不変であるためには、成分が

$$\begin{pmatrix} V^X \\ V^Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^x \\ V^y \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

であればよい。

実際、このとき、

$$\begin{aligned} V &= V^X e_X + V^Y e_Y = (e_X \ e_Y) \begin{pmatrix} V^X \\ V^Y \end{pmatrix} \\ &= (e_x \ e_y) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^x \\ V^y \end{pmatrix} \\ &= (e_x \ e_y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^x \\ V^y \end{pmatrix} \\ &= V^x e_x + V^y e_y \end{aligned} \quad (4.60)$$

となっており、たしかに  $V$  そのものは座標変換で不変である。

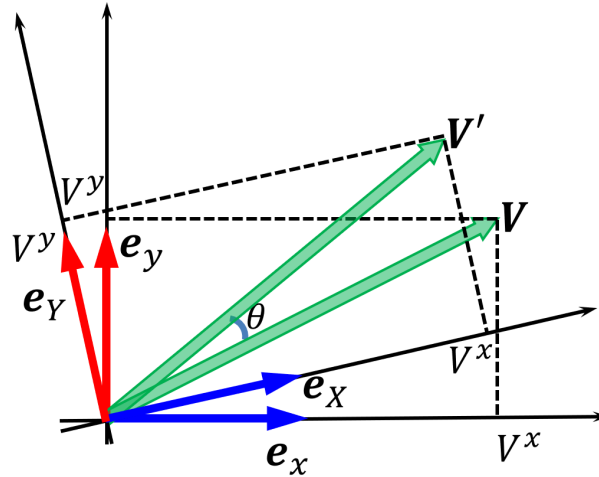


図 4.2 物理系の回転ではベクトル  $V$  は変換を受けるが、それはベクトルの成分値を  $(V^x, V^y)$  に固定したまま、座標基底ベクトルを (4.56) 式に従って  $e_x, e_y$  に変換した結果として得られる。

物理系の回転

定義より、座標基底ベクトルは不変である。一方、ベクトル  $V$  は回転変換を受けて  $V'$  となるが、図 4.2 に示すとおり、これは、ベクトルの成分値を  $(V^x, V^y)$  に固定したまま、基底ベクトルを (4.56) 式に従って  $e_x, e_y$  に変換した結果として得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} V' &= V^x e_x + V^y e_y \\ &= (V^x \cos \theta - V^y \sin \theta) e_x + (V^x \sin \theta + V^y \cos \theta) e_y \\ &= V'^x e_x + V'^y e_y \end{aligned} \tag{4.61}$$

最後の等式より、物理系の回転に伴うベクトルの成分の変換則

$$\begin{pmatrix} V'^x \\ V'^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^x \\ V^y \end{pmatrix} \tag{4.62}$$

が得られる<sup>\*26</sup>。

ベクトル場のリー微分

Lie 微分の幾何学的な定義はやや抽象的なので 4.A.4 節に譲るが、結果論的に言えば、Lie 微分は時空の 2 点  $P(s), Q(s + ds)$  のテンソルを、 $(s$  でパラメータ付けされた) 曲線  $C$  (接ベクトル  $X^a$ ) に沿った点変換によって比べることで定義される微分であるとしてよい<sup>\*27</sup>。以下では座標系を導入して考えることにする

<sup>\*26</sup>座標系の回転に伴うベクトルの成分の変換則 (4.59) 式との符号の違いと、基底ベクトルの違いに注意すること。変換行列は  $\theta \rightarrow -\theta$  としたものに对应している。これは逆回転操作であり、成分の変換行列は互いに逆行列になっている：

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{4.63}$$

この結果をもって、「座標変換」と「物理系の変換」は見方の違いに過ぎない、と説明している教科書もあるが、その導入における概念上の違いを考えれば、これは言い過ぎであると思う。実際、もし「座標変換」と「物理系の変換」を同一視できるとすると、ネーターの定理からの帰結として、任意の「座標変換」で物理系が不変である一般相対性理論においては、任意の変換に付随した保存量が存在することになってしまう。

<sup>\*27</sup> 能動的変換 (点変換) は座標系を導入することなしに定義できるので、Lie 微分は「幾何学的に」定義されることになる。また、点変換の定義には「平行移動」の概念は必要ないので、共変微分 (接続係数) とは独立なものである。ただし、Lie 微分と共変微分の両方が定義されていれば、両者の間には関係が見つかる。

が、数学的厳密性を別にすれば、以下の議論が幾何学的に行えることは、曲線を間に介在させれば理解できるだろう。

座標系を導入すれば、Lie 微分は時空の2点  $P(x^\alpha)$ ,  $Q(x^\alpha + X^\alpha ds)$  のテンソルを (曲線  $C$  に沿った) 点変換によって比べることで定義される微分である。スカラー場  $f$  の場合、比較するために点変換は必要ないので、Lie 微分は

$$\mathcal{L}_X f \equiv \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{f(x^\alpha + X^\alpha ds) - f(x^\alpha)}{ds} = X^\alpha \partial_\alpha f = X^\alpha \nabla_\alpha f \quad (4.64)$$

と  $X^\alpha$  方向の偏微分である。

ベクトル場の Lie 微分では、点  $P(x^\alpha)$  における  $V^a(P)$  を、 $V^a(Q) = V^a(x^\alpha + ds X^\alpha)$  を点変換

$$\Phi_{\text{pb}}^*(Q \rightarrow P) : x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - X^\alpha ds \quad (4.65)$$

で引き戻したベクトル  $V_{\text{pb}}^a(P)$  と比べる\*28。このとき、

$$\begin{aligned} V_{\text{pb}}^\mu(P) &\equiv \Phi_{\text{pb}}^* V^\mu(Q) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} V^\sigma(x^\alpha + X^\alpha ds) \\ &= (\delta_\sigma^\mu - ds \partial_\sigma X^\mu) [V^\sigma + ds X^\rho \partial_\rho V^\sigma + O(ds^2)] \\ &= V^\mu + ds [X^\rho \partial_\rho V^\mu - V^\sigma \partial_\sigma X^\mu] + O(ds^2). \end{aligned} \quad (4.66)$$

であるから、ベクトル場の  $X^\alpha$  に沿った Lie 微分は、

ベクトル場の Lie 微分

$$\mathcal{L}_X V^a \equiv \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{V_{\text{pb}}^a - V^a}{ds} = X^b \partial_b V^a - V^b \partial_b X^a = X^b \nabla_b V^a - V^b \nabla_b X^a \quad (4.67)$$

となり、テンソル式になる\*29。

双対ベクトル場のリー微分

双対ベクトル場も同様で、点  $Q$  の双対ベクトル  $\omega_a(x^\alpha + ds X^\alpha)$  を変換  $x^\mu \rightarrow x^\mu - X^\alpha ds$  で引き戻した双対ベクトル  $(\omega_{\text{pb}})_a(P)$  と比べる。ベクトルの場合と変換行列が逆になることに注意すれば、

$$\begin{aligned} (\omega_{\text{pb}})_\mu(P) &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \omega_\sigma(x^\alpha + X^\alpha ds) \\ &= (\delta_\mu^\sigma + ds \partial_\mu X^\sigma) [\omega_\sigma + ds X^\rho \partial_\rho \omega_\sigma + O(ds^2)] \\ &= \omega_\mu + ds [X^\rho \partial_\rho \omega_\mu + \omega_\sigma \partial_\mu X^\sigma] + O(ds^2). \end{aligned} \quad (4.69)$$

であるから、双対ベクトル場の Lie 微分は、

$$\mathcal{L}_X \omega_a \equiv \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{(\omega_{\text{pb}})_a - \omega_a}{ds} = X^b \partial_b \omega_a + \omega_b \partial_a X^b = X^b \nabla_b \omega_a + \omega_b \nabla_a X^b \quad (4.70)$$

となる。

\*28  $V_{\text{pb}}$  の添字は「引き戻し (pull back)」の頭文字を取ったもの。

\*29 クリストッフエル記号の対称性より、

$$X^b \nabla_b V^a - V^b \nabla_b X^a = X^b (\partial_b V^a + \Gamma_{bc}^a V^c) - V^b (\partial_b X^a + \Gamma_{bc}^a X^c) = X^b \partial_b V^a - V^b \partial_b X^a \quad (4.68)$$



リー微分がライプニッツ則を満たすこと

スカラー場の Lie 微分は偏微分であるので、

$$X^b \partial_b (\omega_a V^a) = \mathcal{L}_X (\omega_a V^a) = \omega_a \mathcal{L}_X V^a + V^a \mathcal{L}_X \omega_a \quad (4.71)$$

とライプニッツ則が成り立つとして、この条件からも  $\mathcal{L}_X \omega_a$  を導入することができる。その結果は上で導いたものと一致するので、Lie 微分は確かにライプニッツ則を満たす微分演算子としての性格を持つ。

テンソル場のリー微分

一般のテンソルの場合には、

テンソル場の Lie 微分

$$\mathcal{L}_X T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = X^c \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - \sum_{i=1}^k T^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \nabla_c X^{a_i} + \sum_{j=1}^l T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l} \nabla_{b_j} X^c \quad (4.72)$$

となることを示すことができる。特に、計量テンソルにたいしては、

$$\mathcal{L}_X g_{ab} = \nabla_a X_b + \nabla_b X_a \quad (4.73)$$

となる。これは重力場のゲージ自由度に対応しており、以下で重要な役割を果たす。

### 4.3.2 キリングベクトルと保存則

時空に対称性がある場合、それに対応した保存則を導くことができる。ここで、時空の計量がある座標、例えば時間座標に  $x^0$  によらない場合について考えよう。このとき、時空には時間並進に対する対称性がある。すなわち、 $x^0 \rightarrow x^0 + \text{const.}$  に対して計量テンソルは不変である。これは、 $\xi^\alpha = (1, 0, 0, 0)$  として、(点)変換

$$x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \epsilon \xi^\alpha \quad (4.74)$$

に対する不変性として定式化できる。

この場合、測地線方程式を与えるオイラーラグランジュ方程式 (1.28)

$$-\frac{d}{dp} \left( \frac{\partial L}{\partial(dx^\alpha/dp)} \right) + \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0$$

において、 $\partial L / \partial x^0 = 0$  であるから、

$$\frac{d}{dp} \left( \frac{\partial L}{\partial(dx^0/dp)} \right) = 0. \quad (4.75)$$

これより

$$\text{const.} = \frac{\partial L}{\partial(dx^0/dp)} = -g_{0\beta} \frac{1}{L} \frac{dx^\beta}{dp} = -g_{0\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} = -g_{\alpha\beta} \xi^\alpha u^\beta \quad (4.76)$$

となり、測地線に沿って  $-g_{ab} \xi^a u^b$  が保存する。これはエネルギーに相当するものである。

このように、時空の対称性に対応するベクトルがキリングベクトル (Killing ベクトル, Killing vector) である。Minkowski 時空の場合、時空の対称性に付随する Killing ベクトルは 10 個存在する。並進を司る 4 つのベクトルとローレンツ変換 (3 つ) と回転 (3 つ) に対応する 6 つのベクトルである。

Killing ベクトルの定義について、座標に依らない幾何学的な定義を与えよう。時空に对称性があるということは、 $\xi^a$  による点変換によって  $g_{ab}$  が変わらないということである。Lie 微分は点変換されたテンソルの差から定義されていたので、この条件は、 $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0$ 、すなわち、

Killing 方程式 (Killing equation)

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 2\nabla_{(a} \xi_{b)} = 0 \quad (4.77)$$

が満たされることと等価である。これを Killing 方程式 (Killing equation) と呼ぶ。すなわち、時空の対称性は、Killing 方程式を満たす Killing ベクトルが司っている。Killing 方程式は 2 階の対称テンソル ( $\nabla_{(a} \xi_{b)}$ ) に対する方程式なので、4 次元時空の持ちうる最大の Killing ベクトルの数は 10 である。

Killing ベクトルを求めるより具体的な式を導いておこう。リーマンテンソルの定義式に Killing 方程式を使うと、

$$R_{abc}{}^d \xi_d = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \xi_c = \nabla_a \nabla_b \xi_c + \nabla_b \nabla_c \xi_a \quad (4.78)$$

となる。ここで、添字を加えた式を足し引きする。 $(abc + bca - cab)/2$  とすると、

$$\nabla_b \nabla_c \xi_a = \frac{1}{2} (R_{abc}{}^d + R_{bca}{}^d - R_{cab}{}^d) \xi_d \stackrel{(3.29)}{=} -R_{cab}{}^d \xi_d \quad (4.79)$$

これが Killing ベクトルを求める式である\*30。

Minkowski 時空の場合には (4.79) 式は  $\partial_a \partial_b \xi_c = 0$  となるから、 $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$  (6 成分) と定ベクトル  $t^a$  (4 成分) を積分定数として、

$$\xi^a = \omega^a{}_b x^b + t^a \quad (4.82)$$

と表すことができる\*31。

### 4.3.3 エネルギー運動量の保存

座標変換における一般共変性とは異なる概念の対称性を、点変換によって導入することができる。一般相対論における点変換は、時空  $M$  から  $M'$  への写像である。この写像によって  $M$  と  $M'$  が本質的に同等の場合を考えよう。つまり、時空上の点を整合的に全体としてずらす操作を考える。このような場合、この点変換をを微分同相写像 (diffeomorphism) と呼ぶ。

微分同相写像は時空の点 (ラベル) を連続的に、齟齬が出ないように付け替える操作といえるから、微分同相写像によって物理は不変であるべきであろう。すなわち、時空に Killing ベクトルによる特別な対称性

\*30 実際、時空のある点  $P$  において初期値 ( $\xi^a, L_{ab} \equiv \nabla_a \xi_b$ ) を指定したとして、時空の任意の点  $Q$  における Killing ベクトルを求めるためには、 $P, Q$  をつなぐ任意の曲線をとって、その接ベクトルを  $v^a$  として、

$$v^a \nabla_a \nabla_b \xi_c = v^a L_{ab}, \quad (4.80)$$

$$v^a \nabla_a L_{bc} = -v^a R_{bca}{}^d \xi_d \quad (4.81)$$

を解けばよい。

\*31 具体的な成分は

$$(\xi_\mu^{\text{trs}})^\alpha = (t_\mu)^\alpha : 4 \text{ translation}, \quad (4.83)$$

$$(\xi_k^{\text{rot}})^0 = 0, (\xi_k^{\text{rot}})^i = \epsilon_k{}^{ij} x_j : 3 \text{ rotation}, \quad (4.84)$$

$$(\xi_k^{\text{bst}})^\alpha = \delta^\alpha_{[0} x_{k]} : 3 \text{ boost} \quad (4.85)$$

がない場合 ( $L_X g_{ab} \neq 0$ ) にも、一般相対性理論には微分同相という対称性があると考えられる。それではこの対称性がもたらす保存則は何であろうか?<sup>\*32</sup>

まず、点変換によるテンソルの差は Lie 微分で与えられるから、今考えている計量テンソルの変分は

$$\delta g^{ab} = \nabla^a X^b + \nabla^b X^a = 2\nabla^{(a} X^{b)} \quad (4.86)$$

であることに注意する。

一方、点変換による物質場  $\psi$  の変分は  $\delta\psi = \mathcal{L}_X\psi$  である。この変分に対して物質場の作用 ( $S_M$ ) が不変であるとする、

$$0 = \delta S_M = \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} \delta g^{ab} + \frac{\delta S_M}{\delta\psi} \delta\psi \quad (4.87)$$

となる。ここで、右辺第 2 項は物質場に対するオイラーラグランジュ方程式を与える変分で、(物質場の) 運動方程式が満たされていれば消える。

一方、右辺第 1 項はエネルギー運動量テンソルの定義式 (4.31) であるから

$$\begin{aligned} 0 &= \int T_{ab} \delta g^{ab} dV_4 = 2 \int T_{ab} \nabla^{(a} X^{b)} dV_4 = 2 \int T_{ab} \nabla^a X^b dV_4 \\ &= 2 \int \nabla^a (T_{ab} X^b) dV_4 - 2 \int X^b \nabla^a T_{ab} dV_4 \end{aligned} \quad (4.88)$$

となる。右辺第 1 項の表面積分は、物質場が局在している場合には、積分範囲を十分大きく取れば消えるから、任意の微分同相写像について物質場の変分がゼロとなるためには、

エネルギー運動量ストレステンソルの局所保存則

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \quad (4.89)$$

でなければならない。

この「保存則」は解析力学で学んだ通常の保存則とは少し意味合いが異なる。解析力学における通常の保存則、例えば運動量保存則であれば、空間の一樣性という大域的な対称性に付随するものであった。これに対して、点変換 (4.86) は、一般に時空点に依存する局所的なものであるため<sup>\*33</sup>、微分同相写像に対する対称性も大域的なものではない。したがって、それに付随する「保存則」も大域的なものではない。実際、これはエネルギー運動量テンソルの局所保存ともいうべきものになっている<sup>\*34</sup>。

時空に Killing が存在する場合

ここで、 $X^a$  が Killing ベクトルである場合について考える。 $P^a \equiv T^{ab} X_b$  と定義すると

$$\nabla_a P^a = \nabla_a (T^{ab} X_b) = X_b \nabla_a T^{ab} + T^{ab} \nabla_a X_b = X_b \nabla_a T^{ab} + 2T^{ab} \nabla_{(a} X_{b)} = 0 \quad (4.90)$$

となる。

ここで、計量テンソルの行列式に対して成り立つ (4.21) 式から

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{-g} \frac{\partial(-g)}{\partial x^\mu} \quad (4.91)$$

<sup>\*32</sup>電磁場におけるゲージ変換に対応する。ゲージ変換によってベクトルポテンシャルは不変ではないが、物理 (マクスウェル方程式) は不変である。

<sup>\*33</sup> $X^a$  が定ベクトルであればそもそも  $\delta g^{ab} = 0$  となってしまう

<sup>\*34</sup>局所慣性系では  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  となり、これは通常の保存則を記述する。

および

$$\Gamma^a_{a\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} \quad (4.92)$$

を用いることで、ベクトル場の共変微分には次の重要な関係式が成り立つことが示せる。

$$\nabla_a V^a = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-g}V^\mu) \quad (4.93)$$

従って、Killing ベクトルが存在する場合には、

$$\nabla_a P^a = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-g}P^\mu) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-g}P^\mu) = 0 \quad (4.94)$$

すなわち  $\sqrt{-g}P^b = \sqrt{-g}T_{ab}X^b$  が保存量となる。

## 4.4 線形化されたアインシュタイン方程式

### 4.4.1 アインシュタイン方程式の線形化

Newton 重力理論との対応をみるために、重力が弱いとして次のように平坦時空における摂動で記述することを考えよう。

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}, \quad (|h_{ab}| \ll 1) \quad (4.95)$$

以下、線形化されたアインシュタイン方程式を導出するために、 $h_{ab}$  の1次まで考慮しよう。線形レベルでは  $h^c_b = g^{ac}h_{ab} = \eta^{ac}h_{ab}$  となるので、 $h_{ab}$  を含むテンソルの添字は  $\eta_{ab}$  で上げ下げすることができる<sup>\*35</sup>。ただし、 $g_{ac}g^{cb} = \delta_a^b$  の関係を満たすためには、

$$g^{ab} = \eta^{ab} - h^{ab} \quad (4.96)$$

となることに注意しよう。

クリストッフェル記号は、

$$\Gamma^\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\gamma\rho}(\partial_\alpha h_{\beta\gamma} + \partial_\beta h_{\alpha\gamma} - \partial_\gamma h_{\alpha\beta}) \quad (4.97)$$

リッチテンソルは

$$\begin{aligned} R_{ab} &= \partial_c \Gamma^c_{ab} - \partial_a \Gamma^c_{cb} \\ &= \partial^c \partial_{(b} h_{a)c} - \frac{1}{2} \partial^c \partial_c h_{ab} - \frac{1}{2} \partial_a \partial_b h^c_c \end{aligned} \quad (4.98)$$

以下、 $h^c_c = h$  と書くことにする (行列式ではないことに注意)。リッチスカラーは

$$R = g^{ab}R_{ab} = \eta^{ab}R_{ab} = \partial^a \partial^b h_{ab} - \partial^c \partial_c h \quad (4.99)$$

アインシュタインテンソルは

$$G_{ab} = \partial^c \partial_{(b} h_{a)c} - \frac{1}{2} \partial^c \partial_c h_{ab} - \frac{1}{2} \partial_a \partial_b h - \frac{1}{2} \eta_{ab}(\partial^c \partial^d h_{cd} - \partial^c \partial_c h) \quad (4.100)$$

線形化されているので、 $G_{ab} = R_{ab} - \eta_{ab}R/2$  となることに注意して

$$\gamma_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h \quad (4.101)$$

<sup>\*35</sup>  $g^{cd}\partial_d h_{ab} = \eta^{cd}\partial_d h_{ab} = \partial^c h_{ab}$

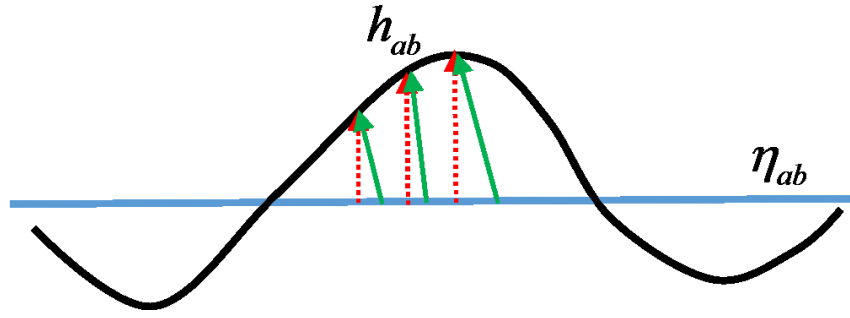


図 4.3 微分同相性に起因して、全体として整合性がとれているならば、摂動場  $h_{ab}$  とその”ずれもと”の対応の記述の仕方の自由度 (対称性) がある。

とおくと式を簡略化することができる。

両辺トレースをとると  $\gamma^c_c = \gamma$  として、

$$\gamma = -h \tag{4.102}$$

であるから、

$$h_{ab} = \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma \tag{4.103}$$

である。これを (4.100) 式に代入すれば、

線形化されたアインシュタイン方程式 (linearized Einstein equation)

$$G_{ab} = -\frac{1}{2}\partial^c\partial_c\gamma_{ab} + \partial^c\partial_{(b}\gamma_{a)c} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\partial^c\partial^d\gamma_{cd} = 8\pi GT_{ab} \tag{4.104}$$

が得られる。

#### 4.4.2 重力場のゲージ自由度と線形重力波方程式

さらに方程式を簡略化するためには、一般相対性理論には、微分同相写像に対する対称性があることを使う。 $h_{ab}$  は平坦時空からのずれを記述するが、微分同相性 (すなわち点変換に対する対称性) から、すなわち、 $g_{ab}$  と  $\Psi_{ds}g_{ab}$  は同じ時空幾何学を表すのであるから、これは、摂動場  $h_{ab}$  についていえば”ずれ”と”ずれもと”の対応付けについて自由度があることになる。

点変換によるずれは Lie 微分で表されたから、この対称性は  $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \mathcal{L}_X g_{ab}$  のもとでの対称性である。摂動場の観点からは、

$$h_{ab} \rightarrow h_{ab} + 2\partial_{(a}X_{b)}, \tag{4.105}$$

$$\gamma_{ab} \rightarrow \gamma_{ab} + 2\partial_{(a}X_{b)} - \eta_{ab}\partial_c X^c \tag{4.106}$$

である<sup>\*36</sup>。この (ゲージ) 自由度  $X^a$  を使って、

de Donder 条件 (de Donder gauge condition)

$$\partial_b\gamma^{ab} = 0 \tag{4.111}$$

\*36 この結果は、計量テンソルの成分の変換則

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} g'_{\alpha\beta} \tag{4.107}$$

において、微小座標変換

$$x^\mu = x'^\mu + X^\mu \tag{4.108}$$

とできる。これを de Donder 条件と呼ぶ<sup>\*37</sup>。

実際、 $\partial_b \gamma^{ab} \neq 0$  であった場合にも、

$$\partial_b \gamma^{ab} \rightarrow \partial_b \gamma^{ab} + \partial^c \partial_c X^a \quad (4.112)$$

と変換するから、 $X^a$  を  $\partial_b \gamma^{ab}$  がソース項である波動方程式

$$\partial^c \partial_c X^a = -\partial_b \gamma^{ab} \quad (4.113)$$

の解として選べば、 $\partial_b \gamma^{ab} = 0$  とできる。

de Donder 条件の下で、線形化されたアインシュタイン方程式は、

線形重力波方程式

$$\partial^c \partial_c \gamma_{ab} = -16\pi G T_{ab} \quad (4.114)$$

となる。これは波動方程式であり、アインシュタイン方程式は波として伝わる成分 (重力波) を解として含んでいることが分かる。

無限遠でソース項  $T_{ab}$  がないとして、null 無限遠で外側に向かう波動のみが存在するという境界条件のもと<sup>\*38</sup>、微分演算子  $\partial^c \partial_c$  の遅延グリーン関数が

$$G_{\text{ret}}(x^\alpha) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(x^0 - |\mathbf{x}|) \theta(x^0) \quad (4.115)$$

であることを用いれば、線形化されたアインシュタイン方程式の解は、

$$\gamma_{ab}(x^\alpha) = 4G \int \frac{T_{ab}(x^0 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad (4.116)$$

と形式的に書くことができる。

## 4.A 4章の補足

### 4.A.1 アインシュタイン方程式の係数 $8\pi G$ の決定

ここでアインシュタイン方程式にあらわれる係数が  $8\pi G = 8\pi G/c^4$  となることを示しておこう。アインシュタイン方程式を

$$G_{ab} = \kappa T_{ab} \quad (4.117)$$

の形に書くと、線形化されたアインシュタイン方程式は、de Donder 条件の下で

$$\partial^c \partial_c \gamma_{ab} = -2\kappa T_{ab} \quad (4.118)$$

に関して  $X^\mu$  の1次までを考慮することによっても得られる。

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} (\eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta}) = \frac{\partial(x^\alpha - X^\alpha)}{\partial x^\mu} \frac{\partial(x^\beta - X^\beta)}{\partial x^\nu} (\eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta}) \\ &= (\delta_\mu^\alpha - \partial_\mu X^\alpha) (\delta_\nu^\beta - \partial_\nu X^\beta) (\eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta}) \\ &= \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} - \partial_\mu X_\nu - \partial_\nu X_\mu + O(X^2) \end{aligned} \quad (4.109)$$

これより、

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu \quad (4.110)$$

<sup>\*37</sup>ローレンス条件 (Lorenz gauge condition) と呼ばれる場合もある。

<sup>\*38</sup>境界条件を与えなければ偏微分方程式は解けない。どういう場合に遅延グリーン関数を用いられるか?

となる。Newton 極限では、

$$T_{00} = \rho \gg |T_{0j}|, |T_{ij}| \quad (4.119)$$

であるから、線形化されたアインシュタイン方程式の 00 成分を考えればよく、また、 $\partial_0 \ll \partial_i$  であるから、(4.118) 式より

$$\Delta\gamma_{00} = -2\kappa\rho \quad (4.120)$$

となる<sup>\*39</sup>。これが重力ポテンシャルを決めるポアソン方程式に一致しなければならない。

一方、運動方程式はどのようになっているだろうか？ 測地線方程式

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (4.122)$$

において、位置座標の方程式 ( $\alpha = i$ ) を考える。

固有時は  $h_{ab}$ ,  $v^2$  のオーダーで

$$\begin{aligned} d\tau &= \sqrt{-(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})dx^\alpha dx^\beta} = dt \sqrt{-(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt}} \\ &= dt \sqrt{-(\eta_{00} + h_{00}) - (\eta_{ij} + h_{ij}) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} \approx dt \sqrt{1 - h_{00} - v^2} \\ &\approx dt \left( 1 - \frac{h_{00}}{2} - \frac{v^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.123)$$

である<sup>\*40</sup>。

クリストッフェル記号の部分は

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= \Gamma^i_{00} \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} + 2\Gamma^i_{0k} \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} \\ &\approx [\Gamma^i_{00} + 2\Gamma^i_{0k} v^k + \Gamma^i_{jk} v^j v^k] \left( 1 - \frac{h_{00}}{2} - \frac{v^2}{2} \right)^{-2} \\ &\approx \Gamma^i_{00} \end{aligned} \quad (4.124)$$

となる。ここでクリストッフェル記号が 1 次の微小量であることを用いた。一方、2 階微分の項は

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{dt}{d\tau} \left( \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^i}{dt} \right) \approx \frac{dv^i}{dt} = \frac{d^2x^i}{dt^2} \quad (4.125)$$

と近似される<sup>\*41</sup>。

以上より、微小量 ( $h_{ab}$ ,  $v^2$ ) の 1 次までの測地線方程式は

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{00} = 0 \quad (4.126)$$

となる<sup>\*42</sup>。線形化されたクリストッフェル記号 (4.97) を代入すると、微小量の 1 次までで、

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{ij}(2\partial_0 h_{0j} - \partial_j h_{00}) \approx \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \quad (4.127)$$

<sup>\*39</sup> (4.119) 式より、

$$|\gamma_{00}| \gg |\gamma_{0j}|, |\gamma_{ij}| \quad (4.121)$$

であることに注意。

<sup>\*40</sup> 光速  $c$  を復活させれば  $d\tau = c dt \left( 1 - \frac{h_{00}}{2} \right)$ 。

<sup>\*41</sup>  $d/dt \sim \partial_0$  で  $\partial_0/\partial_i$  は  $v$  のオーダーであるから、 $dv/dt$  は  $v^2$  のオーダーである。

<sup>\*42</sup> 光速  $c$  を復活させれば  $\frac{1}{c^2} \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{00} = 0$

を得る。ニュートン理論における運動方程式と一致するためには、

$$h_{00} = -2\phi \quad (4.128)$$

でなければならない<sup>\*43</sup>。

次に、ポアソン方程式 (4.120) 式を考える。まず、

$$\gamma = \gamma^a_a = \eta^{ab}\gamma_{ab} \approx -\gamma_{00} \quad (4.129)$$

であることに注意すれば、(4.103) 式より

$$\gamma_{00} = 2h_{00} = -4\phi \quad (4.130)$$

となる。これを (4.120) 式に代入すると

$$\Delta\phi = \frac{1}{2}\kappa\rho \quad (4.131)$$

であるが<sup>\*44</sup>、これが重力ポテンシャルを決めるポアソン方程式  $\Delta\phi = 4\pi G\rho$  に一致することから、

$$\kappa = 8\pi G \quad (4.132)$$

となる。アインシュタイン方程式の両辺の次元が合うように光速  $c$  を復活させれば、

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \quad (4.133)$$

である<sup>\*45</sup>。

ところで、

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\gamma \quad (4.137)$$

であるから、線形化アインシュタイン方程式の解としての時空の線素は、

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)(cdt)^2 + \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.138)$$

となる。

<sup>\*43</sup> 光速  $c$  を復活させれば  $h_{00} = -2\phi/c^2$ 。これにより計量テンソルの成分は無次元になる

<sup>\*44</sup> 光速  $c$  を復活させれば  $\Delta\phi/c^2 = \frac{1}{2}\kappa\rho$  である。ここで  $\rho$  はエネルギー密度であるので、これを質量密度  $\rho_0$  をもちいてあらわせば、 $\Delta\phi/c^2 = \frac{1}{2}\kappa\rho_0 c^2$

<sup>\*45</sup> 計量は無次元である。リッチテンソルは計量の2階微分であるから  $G_{ab}$  の次元は  $[L^{-2}]$ 。エネルギー運動量テンソルはエネルギー密度の次元であるから、両者をつなぐように  $c$  を復活させればよい。一般相対論でまず覚えておく事項の一つに

$$\frac{GM}{Rc^2} = \text{無次元} \quad (4.134)$$

がある。ここで  $M, R$  は天体の質量と半径を指すことが多いが、今はその次元だけに着目すればよい。これより、

$$\frac{GMc^2}{Rc^4} = \frac{G}{c^4} \frac{E}{R} = \text{無次元} \quad (4.135)$$

となるので

$$\frac{G}{c^4} \frac{E}{R^3} = \frac{G}{c^4} \times (\text{エネルギー密度}) = \frac{1}{R^2} \quad (4.136)$$

である。よって  $c^{-4}$  を復活させればよいことが分かる。



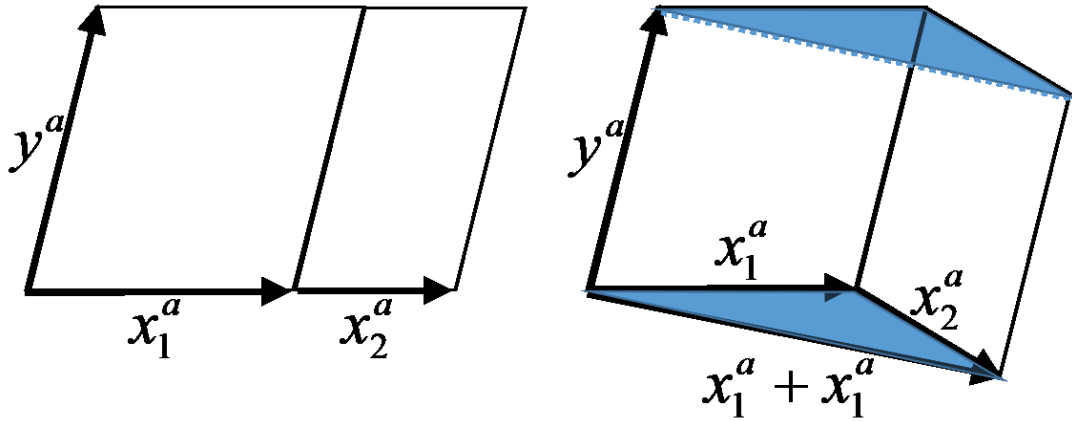


図 4.4 面積テンソルの線形性 (2次元の場合)

### 4.A.2 測地線偏差方程式からのアインシュタイン方程式の"導出"

最後に、おそらくアインシュタインがはじめに着想したであろう (と著者が勝手に考えている) 道筋でアインシュタイン方程式を導出してみよう。一般相対性理論と Newton 理論における測地線偏差の方程式の対応を 4次元に拡張すると ( $\partial_0 \ll \partial_i$ ),

$$\begin{aligned}
 R_{bcd}{}^a X^b T^c T^d &\longleftrightarrow X^j \partial_j \partial^i \phi \\
 R_{bcd}{}^a X^b T^c T^d &\longleftrightarrow X^b \partial_b \partial^a \phi \\
 R_{bcd}{}^a T^c T^d &\longleftrightarrow \partial_b \partial^a \phi
 \end{aligned}
 \tag{4.139}$$

両辺縮約をとってポアソン方程式を用いると

$$\begin{aligned}
 R_{ab} T^a T^b &\longleftrightarrow 4\pi G \rho \\
 R_{ab} T^a T^b &\longleftrightarrow 4\pi G T_{00} \\
 R_{ab} T^a T^b &\longleftrightarrow 4\pi G T_{ab} T^a T^b
 \end{aligned}
 \tag{4.140}$$

すなわち

$$R_{ab} \longleftrightarrow 4\pi G T_{ab}
 \tag{4.141}$$

しかし、 $\nabla_a R^{ab} \neq 0$  なので、このままではエネルギー-運動量テンソルの局所保存の式  $\nabla_a T^{ab} = 0$  を満たすことができない。そこでリッチテンソルをアインシュタインテンソルに変えたのがアインシュタイン方程式である。

$$G_{ab} \longleftrightarrow 4\pi G T_{ab}
 \tag{4.142}$$

係数が合っていないが、これはあくまでも大雑把な推理であるので、係数まで合うことは期待しなくてよい。係数を未定として Newton 極限の議論をもう一度行えば、正しいアインシュタイン方程式にたどり着ける。

### 4.A.3 体積要素の幾何学的な定義

体積要素について幾何学的に定義したい。そのためにまずは 2次元面積要素について考えよう。面積を指定するためには 2つのベクトルが必要である。従って、もし面積要素テンソルなるものがあるとすれば、

それは2階のテンソルであると考えられる。これを  $d\sigma_{ab}$  とおく。線形性について考える。図4.4から分かるように、面積テンソルは線形性を持つので確かにテンソルである。

$$d\sigma_{ab}(a_1x_1^a + a_2x_1^a)(b_1y_1^b + b_2y_1^b) = a_1b_1d\sigma_{ab}x_1^ay_1^b + a_1b_2d\sigma_{ab}x_1^ay_2^b + a_2b_1d\sigma_{ab}x_2^ay_1^b + a_2b_2d\sigma_{ab}x_2^ay_2^b \quad (4.143)$$

さらに、平行なベクトルに対しては面積を作らないのでゼロになるべきであるから、 $d\sigma_{ab}$  は反対称テンソルでなければならない(数学的には微分形式と呼ばれる)。

$$d\sigma_{ab} = d\sigma_{[ab]} \quad (4.144)$$

これは、面積に符号があることを意味する<sup>\*46</sup>。これはちょうど、ベクトルの外積  $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$  が  $\vec{x}, \vec{y}$  が作る平行四辺形の面積と同じ大きさで、 $\vec{x}, \vec{y}$  に向けて右ネジが進む方向のベクトルを与えたことと同等である。したがって、面積の向きもそのように与える。

体積要素についても同様で、3次元、4次元の体積要素  $dV, d\Omega$  は反対称テンソルである。

$$dV_{abc} = dV_{[abc]}, \quad (4.145)$$

$$d\Omega_{abcd} = d\Omega_{[abcd]}, \quad (4.146)$$

時空を4次元とすると、 $n^a$  を時間方向の単位ベクトルとして、3次元体積要素は、4次元体積要素を用いて、

$$dV_{bcd} = n^a d\Omega_{abcd} \quad (4.147)$$

4次元体積要素の自由度の数は1であることに注意しよう。これは、レヴィ・チビタ記号  $\epsilon_{abcd}$  が添字に対して完全反対称で、4次元の場合には  $\epsilon_{0123} = 1$  とおくとすべて決まってしまうことから理解できるだろう。

#### 4.A.4 Lie 微分の幾何学的な定義

曲線と写像を使って Lie 微分を幾何学的に定義する<sup>\*47</sup>。時空を互いに交わらない曲線で埋め尽くしたとしよう。そのうちの一つ  $C$  をとり、 $s$  でパラメータ付けされているとする。測地線を指定して、パラメータを指定すれば、時空上の点を指定することができる。接ベクトルを  $X^a(X^a = dx^a/ds)$  とし、曲線上の点  $P(C, s)$  に対し、次の点変換  $\Phi_{ds} : P \rightarrow Q$  を考える：

$$\Phi_{ds} : P(C, s) \longrightarrow \Phi_{ds}(P) = Q(C, s + ds). \quad (4.148)$$

すると、 $\Phi_{ds}$  は時空  $M$  から時空  $M'$  への写像とみなすことができる<sup>\*48</sup>。ここで、 $M$  と  $M'$  は本質的には同じ時空であるが、点がずらされているので  $'$  をつけて区別しておいた。

次に、関数  $f : M' \rightarrow \mathcal{R}$  を考えると、 $\Phi_{ds}$  によって  $M'$  上の関数を  $M$  上の関数に”引き戻す (pull back)”ことができる。

$$f \circ \Phi_{ds} : M \longrightarrow M' \longrightarrow \mathcal{R} \quad (4.149)$$

一方、 $M$  上の点  $P$  のベクトル  $V^a$  は  $M'$  上の点  $Q$  のベクトル  $V_d^a$  に”引きずられる (drag)”：

$$\Phi_{ds}^* : V^a(P) \longrightarrow V_d^a(Q) \quad (4.150)$$

<sup>\*46</sup>ガウスの定理(の証明など)におけるように、面積要素や体積要素は本質的に「向き」を持つべきものである。また、面積や体積に向きがあると積分した際に互いに打ち消しあって、場合分けしなくても正しい結果が得られるなどの利点もある。

<sup>\*47</sup>以下の議論は、Wald, R. M. (1984) "General Relativity" の Appendix C に基づく。

<sup>\*48</sup>点変換はパラメータ  $ds$  で特徴づけられる1径数変換群  $\Phi_{ds}$  を生成する。すなわち、 $\Phi_{ds_1+ds_2} = \Phi_{ds_2} \circ \Phi_{ds_1}$  によって合成則を定義すると、結合則  $\Phi_{(ds_1+ds_2)+ds_3} = \Phi_{ds_1+(ds_2+ds_3)}$  を満たし、単位元と逆元をそれぞれ  $\Phi_0, [\Phi_{ds}]^{-1} = \Phi_{-ds}$  によって定義できる。

ここで、引きずりの具体的な定義は、

$$V_d|_Q(f) \equiv (\Phi_{ds}^* V)_Q(f) = V_P(f \circ \Phi_{ds}) \quad (4.151)$$

すなわち、ベクトルが関数に作用する方向微分で定義されていたことに注意して、 $M$  上のベクトル  $V$  が  $M$  上の関数  $f \circ \Phi_{ds}$  に作用した結果と、 $M'$  上に引きずられた  $V_d$  が関数  $M'$  上の関数  $f$  に作用した結果が等しくなるものとして  $V_d^a$  を定義する。

引きずりの逆操作として、ベクトルの引き戻し  $[\Phi_{ds}^*]^{-1} = \Phi_{-ds}^*$  をベクトルの引きずりにおいて  $ds \rightarrow -ds$  としたもので定義する。すなわち  $M$  上の関数  $h : M \rightarrow \mathcal{R}$  に対して、

$$\begin{aligned} [\Phi_{ds}^*]^{-1} &= \Phi_{-ds}^* : V^a(Q) \longrightarrow V_{pb}^a(P), \\ V_{pb}|_P(h) &\equiv (\Phi_{-ds}^* V)_P(h) = V_Q(h \circ \Phi_{-ds}) \end{aligned} \quad (4.152)$$

任意のテンソルについても、その引きずりと引き戻しを定義することが可能である。まず、ベクトルの引きずりを用いると、双対ベクトルの引き戻しを次のように定義できる。

$$\begin{aligned} \Phi_{*ds} : \omega'_a(Q) &\longrightarrow \omega_a(P), \\ (\omega_{pb})_a|_P V^a|_P &\equiv (\Phi_{*ds} \omega)_a|_P V^a|_P = \omega_a|_Q V_d^a|_Q = \omega_a|_Q (\Phi_{ds}^* V)_Q \end{aligned} \quad (4.153)$$

ベクトルと双対ベクトルの引きずりと引き戻しから、任意の階数のテンソルの引きずりと引き戻しを

$$\begin{aligned} T_d^{b_1 \dots b_k}_{a_1 \dots a_l} (\omega_1)_{b_1} \dots (\omega_k)_{b_l} (V_1)^{a_1} \dots (V_l)^{a_l} \Big|_Q &= (\Phi_{ds} T)^{b_1 \dots b_k}_{a_1 \dots a_l} (\omega_1)_{b_1} \dots (\omega_k)_{b_l} (V_1)^{a_1} \dots (V_l)^{a_l} \Big|_Q \\ &= T^{b_1 \dots b_k}_{a_1 \dots a_l} (\Phi_{ds} \omega_1)_{b_1} \dots (\Phi_{ds} V_l)^{a_l} \Big|_P \end{aligned} \quad (4.154)$$

$$\begin{aligned} T_{pb}^{b_1 \dots b_k}_{a_1 \dots a_l} (\omega_1)_{b_1} \dots (\omega_k)_{b_l} (V_1)^{a_1} \dots (V_l)^{a_l} \Big|_P &= (\Phi_{-ds} T)^{b_1 \dots b_k}_{a_1 \dots a_l} (\omega_1)_{b_1} \dots (\omega_k)_{b_l} (V_1)^{a_1} \dots (V_l)^{a_l} \Big|_P \\ &= T^{b_1 \dots b_k}_{a_1 \dots a_l} (\Phi_{-ds} \omega_1)_{b_1} \dots (\Phi_{ds} V_l)^{a_l} \Big|_Q \end{aligned} \quad (4.155)$$

で定義する。

Lie 微分について、ベクトル場  $V^a$  の場合に具体的に計算しよう。引き戻しの定義式 (4.152) から、スカラー関数の引き戻しを  $\Phi_{-ds} : x'^\alpha \rightarrow x'^\alpha - X^\alpha ds$  とすると、

$$\begin{aligned} V^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a h &= V_{pb}|_P(h) \equiv V_Q(h \circ \Phi_{-ds}) \\ &= V^\sigma (x^\alpha + X^\alpha ds) \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a h \\ &= [V^\sigma + ds X^\rho \partial_\rho V^\sigma + O(ds^2)] (\delta_\sigma^\mu - ds \partial_\sigma X^\mu) \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a h \\ &= [V^\mu + ds (X^\rho \partial_\rho V^\mu - V^\sigma \partial_\sigma X^\mu)] + O(ds^2) \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a h \end{aligned} \quad (4.156)$$

この結果からわかるように、ようするには、点  $Q$  のベクトル  $V'^a(x^\alpha + ds X^\alpha)$  を変換  $x^\mu \rightarrow x^\mu - X^\alpha ds$  で引き戻せばよい。こうして引き戻されたベクトルを用いると、引き戻しの具体形から明らかなように、

$$\mathcal{L}_X V^a = X^b \partial_b V^a - V^b \partial_b X^a = X^b \nabla_b V^a - V^b \nabla_b X^a \quad (4.157)$$

とテンソル式になるから、ベクトル場の Lie 微分は一般共変性を持つ。

同様に、 $x^\alpha \rightarrow x^\alpha + X^\alpha ds$  に伴うベクトルの引きずりが (4.151) 式から

$$V_d^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \right)^a (f) = V^\sigma \left( \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \right)^a (f) = [\delta_\sigma^\mu + ds \partial_\sigma X^\mu] V^\sigma \left( \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \right)^a (f) \quad (4.158)$$

であるから、双対ベクトルの引き戻しは、(4.153) 式より、

$$\begin{aligned} (\omega_{\text{pb}}(P))_a V^a(P) &= \omega_a(Q) V_d^a(Q) \\ &= [\omega_\mu + ds X^\rho \partial_\rho \omega_\mu] [\delta_\sigma^\mu + ds \partial_\sigma X^\mu] V^\sigma \\ &= [\omega_\sigma + ds (X^\rho \partial_\rho \omega_\sigma + \omega_\mu \partial_\sigma X^\mu)] V^\sigma \end{aligned} \quad (4.159)$$

よって引き戻された双対ベクトルは

$$(\omega_{\text{pb}})_a = \omega_a + ds (X^b \partial_b \omega_a + \omega_b \partial_a X^b) \quad (4.160)$$

双対ベクトルの Lie 微分は

$$\mathcal{L}_X \omega_a = X^b \partial_b \omega_a + \omega_b \partial_a X^b = X^b \nabla_b \omega_a + \omega_b \nabla_a X^b \quad (4.161)$$

となり、やはり一般共変性を持つテンソル式である。

## 4 章の問題

1. 特殊相対性理論の場合に、クライン-ゴルドン方程式を作用関数の変分から導け。特に表面項 (surface terms) の取り扱いについて詳述すること。
2. 特殊相対性理論の場合に、電磁場の作用関数の変分から、マクスウェル方程式とエネルギー運動量テンソルを導け。
3.  $S_G$  が作用の次元を持つことから、 $\kappa$  を無次元の定数として  $C_G = \kappa c^3 / G$  とおけることを示せ。
4. リーマンテンソルの成分表示を用いて、その変分が摂動の 1 次で (4.47) 式となることを示せ。測地線座標を用いず、正攻法で示すこと。
5. 共変微分による発散項が表面項となることを具体的に示し、(4.52) 式を示せ。ただし、(4.93) 式を先取りして用いてよい。
6. (4.21) 式において、 $\delta$  を微分  $d/dx^\mu$  とみなすことで、(4.91) 式を示せ。(4.92) 式を示し、これに適用することで、(4.93) 式を示せ。
7. Newton 極限を考えることにより、アインシュタイン方程式の係数が  $8\pi G/c^4$  となることを示せ。
8. (発展問題)\*49 曲がった時空におけるマクスウェル方程式は

$$\nabla^b F_{ab} = 4\pi \mathcal{J}_a, \quad \nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \quad (4.162)$$

で与えられるが、局所慣性系では  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ ,  $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$  とできるので、

$$\partial^\beta F_{\alpha\beta} = 4\pi \mathcal{J}_\alpha, \quad \partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0 \quad (4.163)$$

となり、これは特殊相対論におけるマクスウェル方程式に一致する。この結果は「等価原理」と整合的である。一方、ベクトルポテンシャルを用いた表式

$$\nabla^a \nabla_a A_b - R^a_b A_a = -4\pi \mathcal{J}_b \quad (4.164)$$

\*49 間違っていることを気にせず何か記述すること。

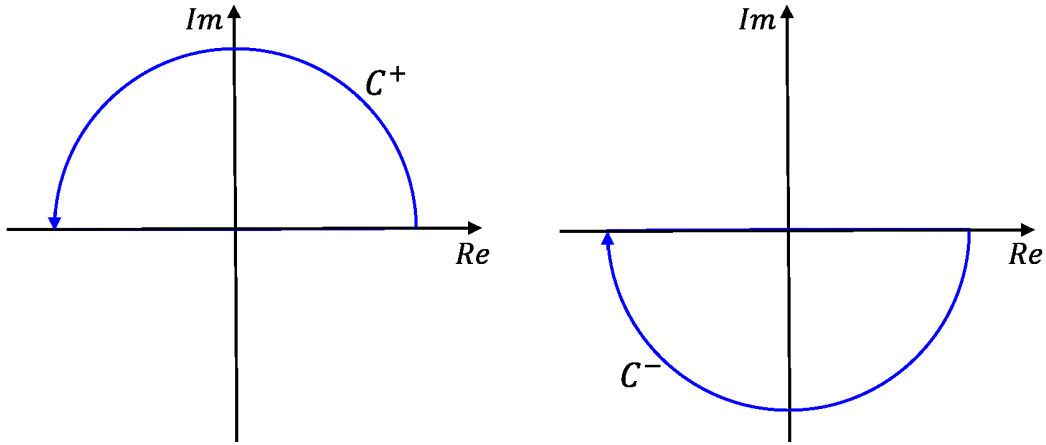


図 4.5 経路  $C_{\pm}$  : 半円の半径を  $R$  として、 $R \rightarrow \infty$  の極限操作が取られるものとする。

を用いると、局所慣性系で  $\partial_{\mu}\partial_{\nu}g_{\alpha\beta} \neq 0$  なので、計量の 2 階微分 ( $\partial\Gamma$ ) を含むリッチテンソルの存在により、特殊相対論における表式には一致せず、「等価原理」と矛盾するように思われる。この疑問点について自分の考えを述べよ。

9. (発展問題)<sup>\*50</sup> ダランベール演算子の遅延グリーン関数は

$$(-\partial_t^2 + \nabla^2)G_{\text{ret}}(x^{\alpha}, x'^{\alpha}) = -\delta(x^{\alpha} - x'^{\alpha}) = -\delta(t - t')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.165)$$

の解で、遅延条件<sup>\*51</sup>

$$G_{\text{ret}}(x^{\alpha}, x'^{\alpha}) = 0, \quad \text{for } t < t' \quad (4.166)$$

を満たすものとして定義される<sup>\*52</sup>。遅延グリーン関数のフーリエ変換を

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\text{ret}}(k^{\mu}, x'^{\alpha}) &= \int d^4x G_{\text{ret}}(x^{\alpha}, x'^{\alpha}) e^{-ik^{\mu}x_{\mu}} \\ &= \int dt d^3x G_{\text{ret}}(x^{\alpha}, x'^{\alpha}) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \end{aligned} \quad (4.167)$$

逆フーリエ変換を

$$\begin{aligned} G_{\text{ret}}(x^{\alpha}, x'^{\alpha}) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \tilde{G}_{\text{ret}}(k^{\mu}, x'^{\alpha}) e^{+ik^{\mu}x_{\mu}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\omega d^3k \tilde{G}_{\text{ret}}(k^{\mu}, x'^{\alpha}) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \end{aligned} \quad (4.168)$$

とする。

- (a) (4.165) 式の両辺をフーリエ表示して

$$\tilde{G}_{\text{ret}}(k^{\mu}, x'^{\alpha}) = -\frac{e^{-ik^{\mu}x'_{\mu}}}{\omega^2 - k^2} = -\frac{e^{i(\omega t' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}')}}{\omega^2 - k^2} \quad (4.169)$$

を示せ。

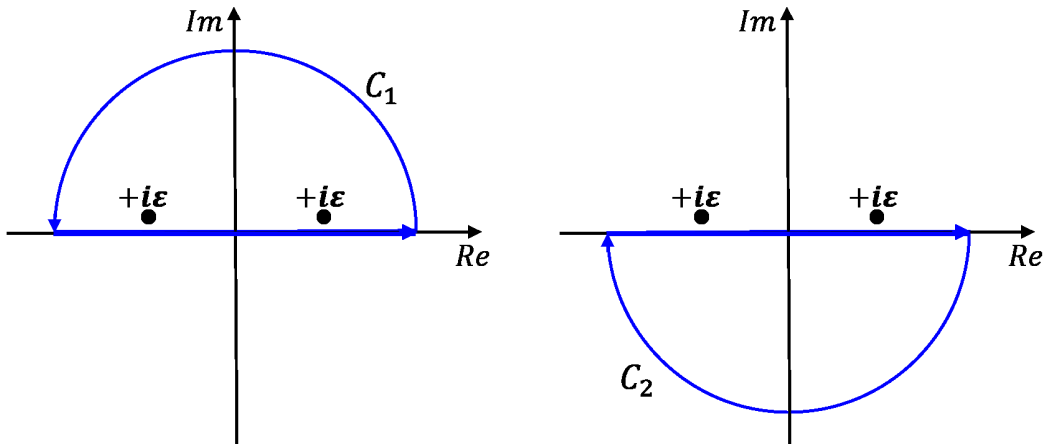
- (b) (4.169) 式を逆フーリエ変換することで遅延グリーン関数が求められる：

$$G_{\text{ret}}(x^{\alpha}, x'^{\alpha}) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - k^2}. \quad (4.170)$$

<sup>\*50</sup> 頑張って (a), (b), (e) は解くこと。

<sup>\*51</sup> これが時間方向の境界条件を与える。

<sup>\*52</sup> 情報が発せられた時刻  $t'$  より未来でのみ値を持つ (遅延効果) という条件である。

図 4.6 経路  $C_1$  および  $C_2$ 

ここで  $\omega$ -積分

$$I_{\text{ret}} \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - k^2} \quad (4.171)$$

は  $\omega = \pm k$  に特異点を含むので、単純に計算することはできない。ここで、ジョルダンの補題および留数定理を用いて、複素積分によって計算する<sup>\*53</sup>。

この問題のように、実軸上に特異点を持つ場合にはジョルダンの補題が適用できないので、特異点を虚軸方向に無限小ずらす技巧的操作<sup>\*54</sup>が必要となる。どのように特異点をずらすべきかは(時間方向の)境界条件に応じて定まる<sup>\*55</sup>。

例として、2つの特異点を両方とも  $+i\epsilon$  ずらす場合を考える(図 4.6 参照)。すると、ジョルダンの補題が適用できるようになるので、 $t-t'$  の正負に応じて経路  $C_{\pm}$  を選んで複素積分を行う。 $t-t' > 0$  の場合には、図 4.5 の  $C_+$  を選んで図 4.6 のように経路  $C_1$  を構築し、

$$I_1 \equiv \oint_{C_1} f(z) dz - \int_{C_+} f(z) dz \quad (4.172)$$

とする。右辺第 2 項はジョルダンの補題により  $R \rightarrow \infty$  で 0 であり、右辺第 1 項は留数定理を用いて計算できる。その結果を用いて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} I_1 \quad (4.173)$$

によって、左辺の積分計算を右辺の複素積分によって実行できる。

$t-t' < 0$  の場合には、図 4.5 の  $C_-$  を選んで図 4.6 のように経路  $C_2$  を構築して同様の計算をすればよい。

上述の計算法に従って、

$$I_{\text{ret}} = \frac{\sin k|t-t'|}{k} \theta(t-t') = \begin{cases} \frac{\sin k|t-t'|}{k} & (t-t' > 0) \\ 0 & (t-t' < 0) \end{cases} \quad (4.174)$$

となることを示せ。この解は遅延条件を満たす。すなわち、2つの特異点を両方とも  $+i\epsilon$  ずらす操作は、境界条件として遅延条件を採用する場合に対応している。

<sup>\*53</sup>ジョルダンの補題および留数定理については問題の最後を参照のこと。また、適切な複素関数論の教科書を参照すること。

<sup>\*54</sup>コーシー (Cauchy) の主値積分という。

<sup>\*55</sup> $x = \pm k$  の 2 つの特異点の虚軸方向へのずらし方は、 $(+i\epsilon, +i\epsilon)$ ,  $(+i\epsilon, -i\epsilon)$ ,  $(-i\epsilon, +i\epsilon)$ ,  $(-i\epsilon, -i\epsilon)$  の 4 通り考えられる。

(c) 2つの特異点を両方とも  $-i\varepsilon$  ずらす場合からは、先進グリーン関数解

$$I_{\text{adv}} = \frac{\sin k|t-t'|}{k} \theta(t'-t) = \begin{cases} 0 & (t-t' > 0) \\ \frac{\sin k|t-t'|}{k} & (t-t' < 0) \end{cases} \quad (4.175)$$

が得られることを示せ。

(d)  $x = -k$  の特異点を  $-i\varepsilon$  ずらし、 $x = +k$  の特異点を  $+i\varepsilon$  ずらす場合からは、外向きグリーン関数解

$$I_{\text{out}} = -\frac{i}{2k} e^{+ik|t-t'|} = \begin{cases} -\frac{i}{2k} e^{+ik(t-t')} & (t-t' > 0) \\ -\frac{i}{2k} e^{-ik(t-t')} & (t-t' < 0) \end{cases} \quad (4.176)$$

が得られ、 $x = -k$  の特異点を  $+i\varepsilon$  ずらし、 $x = +k$  の特異点を  $-i\varepsilon$  ずらす場合からは、内向きグリーン関数解

$$I_{\text{in}} = \frac{i}{2k} e^{-ik|t-t'|} = \begin{cases} \frac{i}{2k} e^{-ik(t-t')} & (t-t' > 0) \\ \frac{i}{2k} e^{+ik(t-t')} & (t-t' < 0) \end{cases} \quad (4.177)$$

が得られることを示せ。これらの解は時間  $(t-t')$  を空間  $(r-r')$  に置き換えたかたちで、量子力学における散乱問題などで用いられる。

(e)  $I_{\text{ret}}$  を (4.170) 式に代入して、 $d^3k = k^2 dk \sin\theta d\theta d\varphi$  と極座標表示することによって積分を計算し、

$$G_{\text{ret}}(x^\alpha, x'^\alpha) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(|t-t'| - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \theta(t-t') \quad (4.178)$$

を導け\*56。

10. 遅延グリーン関数を用いて、線形化されたアインシュタイン方程式の一般解を形式的に求めよ。

#### —— ジョルダンの補題 ——

$f(z)$  は実軸上に極 (特異点) を持たないとする。このとき、 $z = Re^{i\theta}$  として、 $|f(z)| < \frac{M}{R^n}$ , ( $M > 0$ ) で抑えられるならば

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_+} f(z) e^{itz} dz = 0, \quad (t > 0) \quad (4.179)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_-} f(z) e^{itz} dz = 0, \quad (t < 0) \quad (4.180)$$

である。ここで、 $C_\pm$  は図 4.5 に示す半円の経路である。

\*56 量子力学 B で同様の計算に遭遇している。

## 留数定理

反時計回りに廻る任意の閉曲線  $C$  内に、 $f(z)$  の極 (特異点)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  があるとき、

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}(\alpha_k) \quad (4.181)$$

が成り立つ。特に、 $f(z)$  が  $C$  内に特異点を持たない場合には  $\oint_C f(z)dz = 0$  である。ここで、留数  $\text{Res}(\alpha)$  は、グルサ (Goursat) の公式を用いて計算できる。

## グルサ (Goursat) の公式

$f(z)$  が  $n$  位の極 (特異点)  $\alpha$  を持つとき、留数  $\text{Res}(\alpha)$  は

$$\text{Res}(\alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-\alpha)^n f(z)] \quad (4.182)$$

で与えられる。



## 第5章

# 一般相対性理論の古典的テスト

等価原理と一般相対性原理に基づき、重力の本質が潮汐力であるという考察から、4章でアインシュタイン方程式を導出した。しかしながら、同様の仮定の下で導かれる重力場の方程式はアインシュタイン方程式が唯一のものではない。もちろん、理論構築の基礎とする原理や考察を変えれば得られる方程式は変わり得る。つまり、一般相対性理論とアインシュタイン方程式は現段階ではあくまでも仮説であり、これを何らかの方法でテストすることが重要である。そこで、本章では、球対称重力場中における重力理論の古典的テストについて考えよう。

### 5.1 球対称時空と Schwarzschild 解

天体の回転が遅い場合には、その外部時空はアインシュタイン方程式の球対称真空解でよく記述される。そこで、本節ではアインシュタイン方程式を解いて実際にそれを導こう。

#### 5.1.1 球対称時空の線素

もっとも一般的な球対称時空の線素は

$$ds^2 = -E(T, R)dT^2 + 2F(T, R)dTdR + G(T, R)dR^2 + H(T, R)d\Omega \quad (5.1)$$

で与えられる。ここで、

$$d\Omega \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (5.2)$$

は単位球面の線素である。さらに座標変換することで、時空線素を

$$ds^2 = -B(t, r)dt^2 + A(t, r)dr^2 + r^2d\Omega \quad (5.3)$$

とすることができる座標系に移ることができる。

球対称時空の線素が (5.3) 式で与えられること

時空が球対称であれば、計量が方向によらなくなるような角度座標をとることが可能であり、それらを  $\theta, \varphi$  とする。また、時間一定面における半径一定の 2 次元面が球面に見える座標が存在するはずである。そのような時間座標と動径座標を  $T, R$  としよう。ここで、単位球面の線素は

$$d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (5.4)$$

で与えられる。

球対称時空では、回転対称性に加えて、角度反転

$$\begin{aligned}\theta &\longrightarrow \pi - \theta \\ \varphi &\longrightarrow -\varphi\end{aligned}$$

に対する対称性が存在するので、 $dt d\theta$ ,  $dr d\varphi$  などの、 $d\theta$ ,  $d\varphi$  の 1 次の項があってはならない。従って、もっとも一般的な線素の表式は、

$$ds^2 = -E(T, R)dT^2 + 2F(T, R)dTdR + G(T, R)dR^2 + H(T, R)d\Omega \quad (5.5)$$

とあらわせる。

ここで、新たな動径座標を

$$R \longrightarrow r = \sqrt{H(T, R)} \quad (5.6)$$

によって定義すれば、関数の再定義によって以下の形にできる。

$$ds^2 = -e(T, r)dT^2 + 2f(T, r)dTdr + g(T, r)dr^2 + r^2d\Omega \quad (5.7)$$

解析学の理論によれば\*<sup>1</sup>、 $e(T, r)dT - g(T, r)dr$  を全微分とする積分因子  $I(T, r)$  が存在するので、

$$-dt = I(T, r)[-e(T, r)dT + f(T, r)dr] \quad (5.8)$$

によって新たな時間を導入する。この時間座標を用いると (両辺 2 乗して整理)、

$$-edT^2 + 2fdTdR = -\frac{1}{eI^2}dt^2 + \frac{f^2}{e}dr^2 \quad (5.9)$$

となるので、時空線素は

$$ds^2 = -\frac{1}{eI^2}dt^2 + \left[ g + \frac{f^2}{e} \right] dr^2 + r^2d\Omega \quad (5.10)$$

よって (5.3) 式の形となる。

### 5.1.2 Birkoff の定理

この時空線素に対するアインシュタイン方程式を求めよう。まず、ゼロでないクリストッフェル記号は、

$$\begin{aligned}\Gamma^t_{tt} &= \frac{\dot{B}}{2B}, \quad \Gamma^t_{tr} = \frac{B'}{2B}, \quad \Gamma^t_{rr} = \frac{\dot{A}}{2B}, \\ \Gamma^r_{tt} &= \frac{B'}{2A}, \quad \Gamma^r_{tr} = \frac{\dot{A}}{2A}, \quad \Gamma^r_{rr} = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{r}{A}, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\frac{r \sin^2 \theta}{A}, \\ \Gamma^\theta_{r\theta} &= \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma^\varphi_{r\varphi} &= \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\end{aligned} \quad (5.11)$$

\*<sup>1</sup>物理数学 C・D の講義ノートの演習問題 3.6 も参照のこと。

である (問題: 作用の変分から測地線方程式を導いて求めよ) \*2。これより、ゼロでないリッチテンソルの成分は

$$R_{tt} = \left[ \frac{B'}{2A} \right]' + \frac{B'}{4A} \left[ \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right] + \frac{B'}{rA} - \left[ \frac{\dot{A}}{2A} \right]' + \frac{\dot{A}}{4A} \left[ \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A} \right] \quad (5.17)$$

$$R_{tr} = \frac{\dot{A}}{rA} \quad (5.18)$$

$$R_{rr} = - \left[ \frac{B'}{2B} \right]' + \frac{B'}{4B} \left[ \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right] + \frac{A'}{rA} + \left[ \frac{\dot{A}}{2B} \right]' + \frac{\dot{A}}{4B} \left[ \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A} \right] \quad (5.19)$$

$$R_{\theta\theta} = \left[ -\frac{rB'}{2AB} + \frac{rA'}{2A^2} + 1 - \frac{1}{A} \right] \quad (5.20)$$

$$R_{\varphi\varphi} = R_{\theta\theta} \sin^2 \theta \quad (5.21)$$

となる。

球対称天体の外部時空はアインシュタイン方程式の真空解で与えられる。したがって (4.55) 式より、

$$R_{ab} = 0 \quad (5.22)$$

を解けばよい。まず、 $R_{tr} = 0$  から、 $A$  が時間座標によらないことが分かる。

$$A(t, r) = A(r) \quad (5.23)$$

$R_{tt} \times A/B + R_{rr}$  より、

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0 \quad (5.24)$$

となり、これを積分すると、動径座標によらない任意関数を用いて、

$$B(r, t)A(r) = C(t) \quad (5.25)$$

従って、時空の計量は

$$ds^2 = -\frac{C(t)}{A(r)} dt^2 + A(r) dr^2 + r^2 d\Omega \quad (5.26)$$

となる。ここで、時間座標を

$$\sqrt{C(t)} dt \rightarrow dt \quad (5.27)$$

\*2 ドットをアフィンパラメータ (固有時)  $\tau$  による微分として、

$$L \equiv B\dot{t}^2 - A\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \quad (5.12)$$

について作用  $S = \int L d\tau$  の変分からオイラーラグランジュ方程式、すなわち測地線方程式が得られるが、例えば  $\varphi$  方向のオイラーラグランジュ方程式について、

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (5.13)$$

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{d\tau} (-2r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = -4r\dot{r} \sin^2 \theta \dot{\varphi} - 4r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} - 2r^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi} \quad (5.14)$$

より

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0 \quad (5.15)$$

これと  $\varphi$  方向の測地線方程式を比べると、

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = 1/r, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \cos \theta / \sin \theta \quad (5.16)$$

であり (たとえば  $\Gamma_{r\varphi}^\varphi \neq 2/r$  である。対称性に気をつけよ)、他の  $\Gamma_{\alpha\beta}^\varphi$  はすべてゼロである。

と刻み直せば、時空計量は時間によらないかたちになる。

$$ds^2 = -\frac{1}{A(r)}dt^2 + A(r)dr^2 + r^2d\Omega \quad (5.28)$$

すなわち、

——— バーコフの定理 ———

球対称真空解は時間によらない静的な解しかありえない。

これがバーコフ (Birkoff) の定理である。

### 5.1.3 Schwarzschild 解

(5.28) 式の計量を用いてさらにに計算を進めよう。\$R\_{\theta\theta}\$ 成分の式は、

$$\left(\frac{r}{A}\right)' = 1 \quad (5.29)$$

となる。これを積分すると、\$r\_g\$ を積分定数として、

$$\frac{1}{A(r)} = 1 - \frac{r_g}{r} \quad (5.30)$$

を得る。すなわち、時空の計量は、

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega \quad (5.31)$$

となる。

#### 積分定数 \$r\_g\$ の決定

積分定数 \$r\_g\$ を、線形化されたアインシュタイン方程式の解 (4.138) との整合性から決めよう。線形化されたアインシュタイン方程式の解 (4.138) は、等方的な座標系<sup>\*3</sup> で記述されているので、比較のためには等方的な座標系に映る必要がある。そこで、(5.31) 式の座標系 (シュバルツシルド座標という) から座標変換

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega \rightarrow f(\rho)(d\rho^2 + \rho^2d\Omega) \quad (5.33)$$

を行い、等方座標 \$(t, \rho, \theta, \varphi)\$ に移ることを考えよう<sup>\*4</sup>。十分遠方で \$\rho \rightarrow r\$ となるように要請すると、等方座標における時空計量は次のようになる

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - r_g/4\rho}{1 + r_g/4\rho}\right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^4 dE_3 \quad (5.36)$$

<sup>\*3</sup>空間計量部分が

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2d\Omega \quad (5.32)$$

に比例している。

<sup>\*4</sup> ここで、\$d\rho^2 + \rho^2d\Omega\$ は3次元ユークリッド空間における線素を極座標 \$(\rho, \theta, \varphi)\$ で表したもののなので、

$$d\rho^2 + \rho^2d\Omega = dx^2 + dy^2 + dz^2 \equiv dE_3, \quad (5.34)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (5.35)$$

とする \$(x, y, z)\$ 座標が存在する。従って等方座標 (isotropic coordinate) と呼ばれる。

等方座標における時空線素を重力が弱い ( $r_g/r \ll 1$ ) として展開すると、

$$ds^2 = - \left[ 1 - \frac{r_g}{\rho} + \frac{1}{2} \left( \frac{r_g}{\rho} \right)^2 + \dots \right] dt^2 + \left[ 1 + \frac{r_g}{\rho} + \dots \right] dE_3 \quad (5.37)$$

となる。線形化されたアインシュタイン方程式の解 (4.138) と比較すると、 $r_g/r = -2\phi$ 。質量  $M$  の質点のまわりの重力ポテンシャルは  $-GM/r$  であるので、

$$r_g = 2GM = \frac{2GM}{c^2} \approx 3\text{km} \frac{M}{M_\odot} \quad (5.38)$$

となる。 $r_g$  をシュバルツシルド半径 (Schwarzschild radius) と呼ぶ。結局、質量  $M$  の質点まわりの時空の幾何学は、次の Schwarzschild 計量で与えられる。

Schwarzschild 時空の外部解

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega \quad (5.39)$$

等方座標における線素 (5.36) の導出

座標変換は

$$\begin{aligned} f(\rho)\rho^2 &= r^2, \\ f(\rho)d\rho^2 &= \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} dr^2 \end{aligned}$$

辺々割ると

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_g r}} \quad (5.40)$$

これを積分すると、

$$\ln \rho + c = \ln(2r - r_g + 2\sqrt{r^2 - r_g r}) \rightarrow C\rho = 2r - r_g + 2\sqrt{r^2 - r_g r} \quad (5.41)$$

無限遠で  $\rho \rightarrow r$  となるように要請すると、 $C = 4$ 。すなわち

$$\rho = \frac{1}{2} \left[ r - \frac{1}{2}r_g + \sqrt{r^2 - r_g r} \right] \quad (5.42)$$

$$r = \rho \left( 1 + \frac{r_g}{4\rho} \right)^2 \quad (5.43)$$

これを (5.31) 式に代入すれば (5.36) 式を得る。

#### 5.1.4 Eddington-Robertson 展開

一般相対性理論のテストをするために、等方座標における Schwarzschild 計量の弱重力場近似 (5.37) 式において、エディントン-ロバートソン (Eddington-Robertson) パラメータ  $\alpha, \beta, \gamma$  を以下のように導入しよう ( $g_{00}$  が 2 次までの展開なのに対して  $g_{ij}$  の展開が 1 次まででよいのはなぜか?)。

$$ds^2 = - \left[ 1 - \alpha \frac{2GM}{\rho} + \beta \frac{2G^2 M^2}{\rho^2} + \dots \right] dt^2 + \left[ 1 + \gamma \frac{2GM}{\rho} + \dots \right] (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.44)$$

アインシュタインの一般相対性理論では

$$\alpha = \beta = \gamma = 1 \quad (5.45)$$

であるが、例えば Brans-Dicke 理論<sup>\*5</sup>では、

$$\alpha = \beta = 1, \quad \gamma = \frac{\omega + 1}{\omega + 2} \quad (5.46)$$

である。

ここで、等方座標における計量 (5.44) をもとのシュバルツシルド座標に戻すことを考えよう。このとき、 $r$  と  $\rho$  の関係を新たに

$$r \equiv \rho \left( 1 + \gamma \frac{GM}{\rho} + \dots \right) \quad (5.47)$$

で定義する。これより

$$\rho = r \left( 1 - \gamma \frac{GM}{r} + \dots \right) \quad (5.48)$$

である。これを用いて等方座標から Schwarzschild 座標にもどれば、時空の計量は

$$ds^2 = - \left[ 1 - \alpha \frac{2GM}{r} + (\beta - \alpha\gamma) \frac{2G^2 M^2}{r^2} + \dots \right] dt^2 + \left[ 1 + \gamma \frac{2GM}{r} + \dots \right] dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (5.49)$$

となる。一般相対性理論の古典的テストではこの計量が用いられることが多い。

ここで、パラメータ  $\alpha$  について考えると、質量 (あるいは重力定数、より正確にはそれらの積) の (経験的) 定義と縮退してしまうので、テストできる量ではない (なぜか?)<sup>\*6</sup>。したがって以下では

$$\alpha = 1 \quad (5.51)$$

とする。

## 5.2 静的球対称時空における測地線方程式

球対称時空における計量は (5.3) 式であたえられた。さらに、時空は静的である (時空計量が時間に依らない) としよう<sup>\*7</sup>。

$$ds^2 = -d\tau^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2 d\Omega \quad (5.52)$$

この時空におけるクリストッフェル記号は (5.11) 式において時間微分項を落としたものである。

ここで、測地線方程式を

$$\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = 0 \quad (5.53)$$

<sup>\*5</sup>一般相対性理論とは異なり、重力場のラグランジアン密度が  $\phi^2 R$  で与えられ、スカラー場  $\phi$  が理論にあらわれる。スカラー場と物質場の結合の強さの度合い  $1/\omega$  をパラメータとして持つ。Brans-Dicke の理論を発展させたスカラーテンソル理論では、 $\omega$  は一般にスカラー場の関数  $\omega(\phi)$  となる。

<sup>\*6</sup>実際、測地線方程式の Newton 極限から、重力加速度が

$$-g = -\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = -\frac{\alpha GM}{r^2} \quad (5.50)$$

となるので、 $GM$  に吸収させることができる。

<sup>\*7</sup>軌道運動の時間スケールに比べて中心重力源の進化・変化が遅く、重力エネルギーにたいして回転エネルギーが無視できる場合にはよい近似となっている。本節が対象とする太陽が作る外部重力場は静的球対称時空のものでよく記述される。

のように  $p$  をパラメータとして記述しておこう。これは、粒子の場合には測地線は固有時でパラメータ付けできる ( $p = \tau$ ) が、ヌル測地線を動く光の軌道は  $d\tau^2 = 0$  であるため固有時でパラメータできないためである。このとき測地線方程式は

$$\frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{A'}{2A} \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{r}{A} \left( \frac{d\theta}{dp} \right)^2 - \frac{r \sin^2 \theta}{A} \left( \frac{d\varphi}{dp} \right)^2 + \frac{B'}{2A} \left( \frac{dt}{dp} \right)^2 = 0 \quad (5.54)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{dp} \frac{dr}{dp} - \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\varphi}{dp} \right)^2 = 0 \quad (5.55)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dp^2} + \frac{2}{r} \frac{d\varphi}{dp} \frac{dr}{dp} + 2 \cot \theta \frac{d\varphi}{dp} \frac{d\theta}{dp} = 0 \quad (5.56)$$

$$\frac{d^2 t}{dp^2} + \frac{B'}{B} \frac{dt}{dp} \frac{dr}{dp} = 0 \quad (5.57)$$

となる。

### 5.3 静的球対称時空における運動：赤道面

時空は球対称 (等方的) なので、一般性を失うことなく、粒子の軌道は赤道面内にある

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\theta}{dp} = 0 \quad (5.58)$$

と考えることができる。

初期に条件 (5.58) が満たされているとすると、 $\theta$  方向の方程式 (5.55) から、

$$\frac{d}{dp} \left( r^2 \frac{d\theta}{dp} \right) = 0 \quad (5.59)$$

となる。これを積分すれば

$$r^2 \frac{d\theta}{dp} = L_\theta = \text{constant} \quad (5.60)$$

となるが、初期条件  $L_\theta = 0$  となるので、軌道は常に  $d\theta/dp = 0$ 、すなわち、時間がたった後も測地線の軌道は  $\theta = \pi/2$  面に留まりつづけることが分かる。

時空の球対称を利用して、以下では赤道面の軌道について考える。

#### 5.3.1 時空の Killing ベクトルに付随する運動の定数 (保存量)

静的球対称時空の場合、計量が  $t$  と  $\varphi$  に依らないことからわかるように、時空には

$$\xi^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (5.61)$$

$$\eta^\mu = (0, 0, 0, 1) \quad (5.62)$$

の 2 つの Killing ベクトルが存在する。粒子の軌道の場合、これらに付随する保存量は、

$$\mathcal{E} = -\xi^a u_a = -g_{00} u^0 = B \frac{dt}{d\tau} \quad (5.63)$$

$$\mathcal{L} = \eta^a u_a = -g_{\varphi\varphi} u^\varphi = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau} \quad (5.64)$$

である\*8。

これらの保存量は、球対称時空における測地線方程式の運動の定数 (運動の積分) に対応する\*9。実際、 $\varphi, t$  方向の方程式 (5.56), (5.57) に条件 (5.58) を代入して書き換えると

$$\frac{d}{dp} \left[ \ln \frac{d\varphi}{dp} + \ln r^2 \right] = 0 \quad (5.68)$$

$$\frac{d}{dp} \left[ \ln \frac{dt}{dp} + \ln B \right] = 0 \quad (5.69)$$

となるが、これを積分すると運動の定数が得られる。

まず、測地線方程式の  $t$  成分である (5.69) 式からは、保存量 (5.63) に対応する運動の定数として

$$B \frac{dt}{dp} = E = \text{constant} \quad (5.70)$$

が得られる。粒子の場合、 $E$  は単位質量粒子のエネルギー  $\mathcal{E}$  に対応する\*10。

座標時間  $t$  と軌道を記述するパラメータ  $p$  の変換則と考えることもできる。

一方、(5.68) 式からは、保存量 (5.64) に対応する運動の定数として、

$$r^2 \frac{d\varphi}{dp} = L = \text{constant} \quad (5.71)$$

が得られる。粒子の場合、これは単位質量あたりの軌道角運動量の保存則に相当する\*11。

(5.63), (5.64) 式が固有時  $\tau$  をパラメータとしているのに対して、(5.70), (5.71) 式は  $p$  をパラメータとしているが、両者は定数倍の違いしかないので ((5.82) 式参照)、本質的には同等の関係式であることに注意しよう。

\*8 光子 (質量ゼロの粒子) の場合、これらに付随する保存量は、 $\lambda$  をアフィンパラメータとして

$$\mathcal{E} = -\xi^a u_a = -g_{00} u^0 = B \frac{dt}{d\lambda} \quad (5.65)$$

$$\mathcal{L} = \eta^a u_a = -g_{\varphi\varphi} u^\varphi = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad (5.66)$$

\*9 測地線方程式 (運動方程式) は 2 階の常微分方程式からなるが、これを 1 階積分したものが定数になる場合がある。これを運動の定数と呼ぶ。

運動の定数の典型例が Newton 力学における力学的エネルギー保存則である。実際、運動方程式 (2 階の微分方程式)  $m \frac{d^2 \mathbf{x}(t)}{dt^2} = -\nabla \phi$  の両辺に  $\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} dt$  を作用させて積分すると、エネルギー保存則 (1 階の微分方程式)

$$\frac{1}{2} m \left( \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right)^2 + \phi(\mathbf{x}) = C = \text{constant} \quad (5.67)$$

が得られる。定数  $C$  は系の力学的エネルギーであり、初期条件等によって定められる。

\*10 観測者  $w^a$  にとって、4 元運動量  $p^a$  を持つ粒子のエネルギーが  $-g_{ab} w^a p^b$  で与えられたことに注意しよう。粒子の場合  $p^a = mc^2 w^a$  であるから、(5.63) 式より  $\mathcal{E}$  は単位質量あたりの粒子のエネルギーに相当する。翻って (5.70) 式の  $E$  も単位質量あたりの粒子のエネルギーに対応する。

\*11  $L$  にあらわれる微分をパラメータ  $p$  を座標時間  $t$  に変換すると

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{E} B \quad (5.72)$$

となる。Eddington-Robertson 展開 (5.49) より、重力の弱い極限では  $B \approx 1 + 2\phi$  ( $\phi = -\frac{GM}{r}$  は重力ポテンシャル) である。端子質量あたりの粒子のエネルギーに対応する  $E$  は、速度の遅い極限で  $E \approx 1 + \frac{1}{2}v^2$  と近似される。ここで因子 1 は静止質量エネルギーの部分に相当する。 $v^2$  および  $\phi$  が微小量であることに注意すれば、

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{E} B \approx \frac{L}{1 + \frac{1}{2}v^2} (1 + 2\phi) \approx L \quad (5.73)$$

となるので、 $L$  は粒子の単位質量あたりの角運動量に相当していることがわかる。



5.3.2  $r$  方向の測地線方程式に付随する運動の定数

運動の定数 (5.70), (5.71) を  $r$  方向の運動方程式 (5.54) に代入すると、

$$\frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{A'}{2A} \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 - \frac{L^2}{r^3 A} + \frac{E^2 B'}{2AB^2} = 0 \quad (5.74)$$

となる。ここで、 $2Adr/dp$  をかけて変形すると

$$\frac{d}{dp} \left[ A \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{E^2}{B} \right] = 0 \quad (5.75)$$

となるので、これを積分すればもう一つの運動の定数

$$A \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{E^2}{B} = -H = \text{constant} \quad (5.76)$$

が得られる。その導出からも示唆されるように、(5.76) 式は Newton 理論における力学的エネルギー保存則に相当する<sup>\*12</sup>。

## 5.3.3 固有時と測地線パラメータの変換則

運動の積分 (5.76) 式は固有時 (粒子の場合) と測地線パラメータ  $p$  の変換則を与える。実際、(5.76) 式の運動の定数  $E, L$  を (5.70), (5.70) 式を用いて座標の微分に戻せば、

$$A \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\varphi}{dp} \right)^2 - B \left( \frac{dt}{dp} \right)^2 = -H \quad (5.80)$$

であるが、さらに赤道面条件 (5.58) を用いれば、

$$A \left( \frac{dr}{dp} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dp} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\varphi}{dp} \right)^2 - B \left( \frac{dt}{dp} \right)^2 = -H \quad (5.81)$$

となる。これと時空線素 (5.52) を比べると、

$$ds^2 = -H dp^2 \quad (5.82)$$

であることが分かる。

これより、粒子に対して測地線のパラメータ  $p$  を固有時  $\tau$  に選べば  $H = 1$  である。光子の場合には  $p$  を任意のアフィンパラメータに選んでおけば  $H = 0$  である。

<sup>\*12</sup> Newton 極限で (5.76) 式がどうなるかを考えればよい。粒子の場合を考えて  $H = 1$  と選ぶ。重力が弱い極限で  $A \approx 1 - 2\phi$ ,  $B \approx 1 + 2\phi$  であることを用いれば、(5.76) 式は Newton 極限で

$$\frac{E^2(1-2\phi)}{(1+2\phi)^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{r^2} - \frac{E^2}{1+2\phi} = -1 \quad (5.77)$$

となる。(1+2φ) を掛けて整理すると

$$\frac{E^2(1-2\phi)}{1+2\phi} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + (1+2\phi) \frac{L^2}{r^2} + 2\phi = E^2 - 1 \quad (5.78)$$

$E \approx 1 + (\text{微小量})$  であることに注意して、微小量について Taylor 展開すると、主要項の関係式として

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2r^2} + \phi = \frac{E^2 - 1}{2} \quad (5.79)$$

が得られる。ここで、 $\phi, v^2 = \left( \frac{dr}{dt} \right)^2, L^2/r^2$  が同次の微小量であることに注意しよう。これより (5.76) 式は Newton 理論における力学的エネルギー保存則に相当することが分かる。

### 5.3.4 有効ポテンシャル

(5.76) 式の両辺を  $A(r)$  割ると、

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2 A(r)} - \frac{E^2}{A(r)B(r)} + \frac{H}{A(r)} = 0 \quad (5.83)$$

となるが、ここで

$$2V_{\text{eff}}(r) \equiv \frac{L^2}{r^2 A(r)} - \frac{E^2}{A(r)B(r)} + \frac{H}{A(r)} \quad (5.84)$$

有効ポテンシャルと呼ぶ。この場合には (5.76) 式は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = 0 \quad (5.85)$$

のように見た目上シンプルな形になる。

ここで、有効ポテンシャルが粒子の場合 ( $H = 1$ ) と光子の場合 ( $H = 0$ ) で異なることに注意しよう。さらに、ニュートン力学におけるケプラー問題の場合と異なり、有効ポテンシャルは角運動量  $L$  だけでなくエネルギー  $E$  に依存していることも注目に値する。例えば、円軌道を考える場合には、粒子 (光子) にポテンシャルの極値に相当するある特定のエネルギーを付与する必要があるが、ポテンシャル (の極値) が粒子のエネルギーに依存しているため、ポテンシャルの極値と粒子のエネルギーが整合的になるようなつじつま合わせが必要となる。

### 5.3.5 赤道面軌道の方程式 $r(\varphi)$

一般相対性理論の古典的テストでは、時間の関数としての軌道の発展よりも、角度の関数としての動径座標の「形」( $r(\varphi)$ ) が重要な役割を果たす場面も多い。そこで、 $r$  と  $\varphi$  の間の関係を求めておこう。

運動の積分 (5.71) を用いて (5.76) 式から  $dp$  を消去すると、

$$\frac{A}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{E}{L^2 B} = -\frac{H}{L^2} \quad (5.86)$$

となる。これより

$$d\varphi = \pm \frac{A^{1/2}}{r^2 \left[ \frac{E}{L^2 B} - \frac{H}{L^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}} dr \quad (5.87)$$

を得る。これを積分すれば測地線の軌道の方程式  $r(\varphi)$  を求めることができる。

尚、(5.76) 式において、一般に空間計量の成分は正である ( $A > 0$ ) ので、軌道は

$$\frac{L^2}{r^2} + H < \frac{1}{B} \quad (5.88)$$

を満たす  $r$  に限られることに注意しよう。

## 5.4 光の湾曲

はるか遠方からの光線あるいは粒子の軌道が太陽の重力場で曲げられる場合を考えよう<sup>\*13</sup>。以下では  $E = 1$  と選ぶものとする。図 5.1 では誇張して描かれているが、湾曲する角度は非常に小さいとする。ま

<sup>\*13</sup> 本節の議論は Weinberg, S. (1972) "Gravitation and Cosmology" (John Wiley & Sons) に従う。

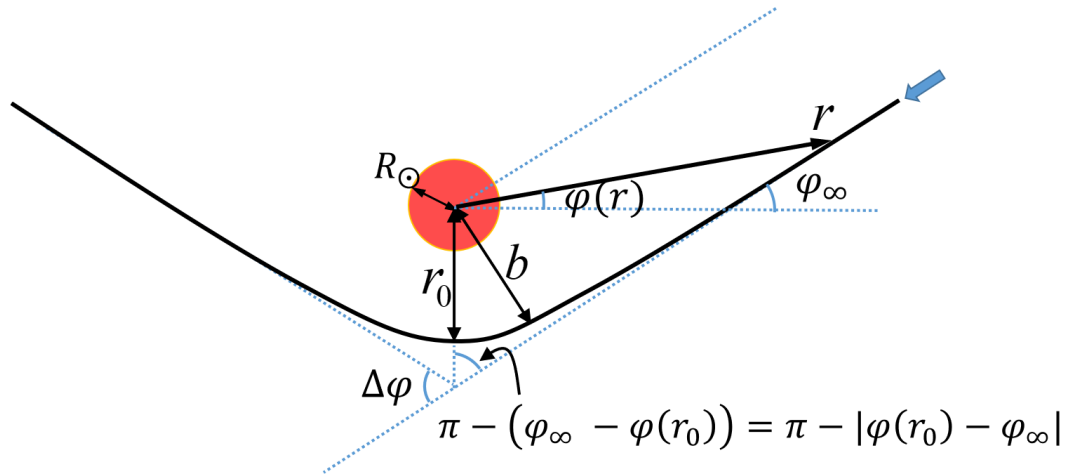


図 5.1 光線 (粒子) の軌道の太陽重力場による湾曲

た、角度座標は時計回りを正とする。

無限遠では太陽の重力場はゼロになり速度  $-V$  で等速直線運動しているとして

$$b = r \sin(\varphi - \varphi_\infty) \approx r(\varphi - \varphi_\infty) \quad (5.89)$$

$$-V = \frac{d}{dt}(r \cos(\varphi - \varphi_\infty)) \approx \frac{dr}{dt} \quad (5.90)$$

ここで、 $b$  は衝突パラメータ (impact parameter) と呼ばれる。もちろん、光線の場合には  $V = 1$  である。

軌道にそった保存量  $H, L$  を無限遠 ( $A = B = 1$ ) で評価すると、 $b, V$  を用いて、

$$L = bV \quad (5.91)$$

$$H = 1 - V^2 \quad (5.92)$$

となる<sup>\*14</sup>。 $r_0$  を最接近時の位置とすると、 $r_0$  では  $dr/d\varphi = 0$  であるから、(5.86) 式より、

$$L = r_0 \sqrt{\frac{1}{B_0} - 1 + V^2} \quad (5.93)$$

ここで  $B_0 \equiv B(r_0)$  とした。軌道は (5.87) 式の負符号の場合を積分すれば求まり<sup>\*15</sup>、

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \int_r^\infty \frac{A^{1/2} dr}{r^2 \left[ \frac{1}{r_0^2} \left( \frac{1}{B_0} - 1 + V^2 \right) \left( \frac{1}{B} - 1 + V^2 \right) - \frac{1}{r^2} \right]^{1/2}} \quad (5.94)$$

軌道の対称性から、 $r: \infty \rightarrow r_0$  までの角度のずれを 2 倍すれば、積算された角度のずれとなる。直線軌道ではそれは  $\pi$  であるから、軌道が直線からずれて湾曲する角度  $\Delta\varphi$  は、

$$\Delta\varphi = 2|\varphi(r_0) - \varphi_\infty| - \pi \quad (5.95)$$

である。

\*14 (5.89) 式より  $b/r = \varphi - \varphi_\infty$ 。これを  $t$  で微分して  $r^2$  をかけると、 $r^2 d\varphi/dt (= L) = bV$ 。また、(5.83) 式において、 $E = 1$  より  $dp = dt$  として、 $r \rightarrow \infty$  で  $A = B = 1$ 、 $L^2/r^2 \rightarrow 0$  なので  $H = 1 - V^2$ 。

\*15 無限遠での角度を基準とすると  $r$  の減少するにつれ  $\varphi$  が増えるため。

光線 ( $V = 1$ ) の場合には積分は簡単化され、

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \int_r^\infty \frac{A^{1/2}}{r} \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{B_0}{B} - 1 \right]^{-1/2} dr \quad (5.96)$$

ここで、(5.49) のエディントン-ロバートソン展開を用いて積分すると、(5.94) 式は

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \arcsin \left( \frac{r_0}{r} \right) + \frac{GM}{r_0} \left[ 1 + \gamma - \gamma \sqrt{1 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^2} - \sqrt{\frac{1 - r_0/r}{1 + r_0/r}} \right] + \dots \quad (5.97)$$

となる<sup>\*16</sup>。これより、 $GM/r_0$  の1次までで、

$$\Delta\varphi = \frac{4GM}{r_0} \left( \frac{1 + \gamma}{2} \right) = \frac{4GM}{b} \left( \frac{1 + \gamma}{2} \right) \quad (5.101)$$

一般相対性理論  $\gamma = 1$  の場合、太陽の表面ぎりぎりを通る光線の曲がり角は 1.75 秒角、木星の場合には 0.02 秒角である。現在、 $|\gamma - 1| < O(10^{-4})$  の制限がつけられている。

## 5.5 水星の近日点移動

次に、水星の近日点移動を用いた一般相対性理論のテストについて考えよう<sup>\*17</sup>。太陽を原点にとって、太陽からもっとも遠ざかる位置を  $r_+$ 、もっとも近づいた位置を  $r_-$  とする。これらの点では  $dr/d\varphi = 0$  となるので、(5.86) 式より、

$$\frac{1}{r_\pm^2} = \frac{1}{L^2 B_\pm} - \frac{H}{L^2} \quad (5.102)$$

これら 2 式より、

$$H = \frac{(r_+^2/B_+) - (r_-^2/B_-)}{r_+^2 - r_-^2} \quad (5.103)$$

$$L = \frac{(1/B_+) - (1/B_-)}{(1/r_+^2) - (1/r_-^2)} \quad (5.104)$$

近日点から遠日点の間に水星があるとき、近日点から測って水星が移動した角度は、(5.87) 式の正符号をとって、 $H, L$  を消去すると、

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_- &= \int_{r_-}^r dr \frac{A^{1/2}}{r^2} \left[ \frac{1}{L^2 B} - \frac{H}{L^2} - \frac{1}{r^2} \right]^{-1/2} \\ &= \int_{r_-}^r dr \frac{A^{1/2}}{r^2} \left[ \frac{r_-^2 \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{B_-} \right) - r_+^2 \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{B_+} \right) - \frac{1}{r^2}}{r_+^2 r_-^2 \left( \frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-} \right)} \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.105)$$

<sup>\*16</sup>

$$\left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \frac{B_0}{B} - 1 = \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \left[ 1 + 2GM \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) + \dots \right]^{-1} = \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right] \left[ 1 - \frac{2GM}{r_0(r+r_0)} + \dots \right] \quad (5.98)$$

であるから、積分は

$$\varphi(r) - \varphi_\infty = \int_r^\infty dr \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} \left[ 1 + \gamma \frac{GM}{r} + \frac{2GM}{r_0(r+r_0)} + \dots \right] \quad (5.99)$$

ここで

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \arcsin \left( -\frac{1}{x} \right), \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+c}} = -\frac{\sqrt{x^2+c}}{cx} \quad (5.100)$$

等を用いる。

<sup>\*17</sup> 本節の議論は Weinberg, S. (1972) "Gravitation and Cosmology" (John Wiley & Sons) に従う。

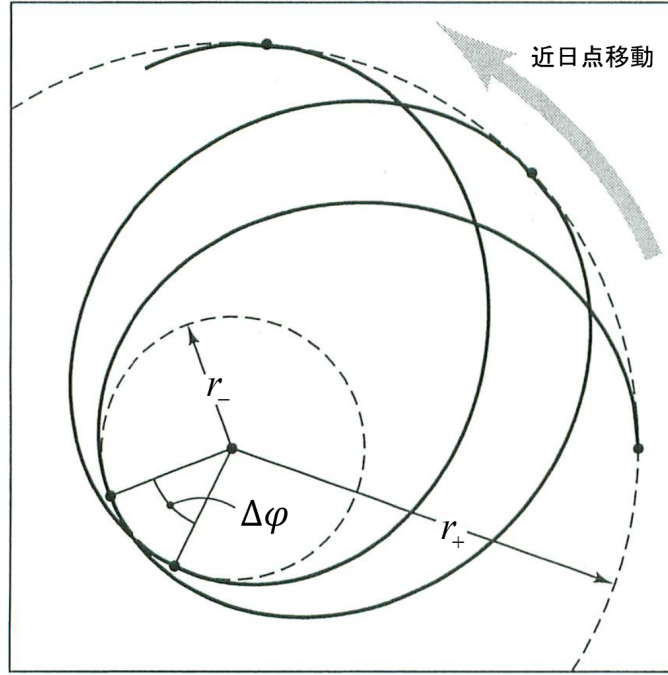


図 5.2 水星の近日点移動の概略図

対称性から、遠日点から近日点まで移動でも同じだけの角度を掃くから、近日点からはじまり再び近日点まで戻ってくるまでには  $2|\varphi(r_+) - \varphi_-|$  だけの角度を掃く。軌道が閉じた楕円軌道である場合にはこれは  $2\pi$  であるが、一般相対論的重力の効果でずれる。したがって水星の近日点移動の角度は (図 5.2 参照)、

$$\Delta\varphi = 2|\varphi(r_+) - \varphi_-| - 2\pi \tag{5.106}$$

さて、(5.105) 式を積分しよう。まず、[ ] 内の  $1/r$  の 2 次関数が  $r = r_{\pm}$  でゼロになることに注意すると、

$$\frac{r_-^2 \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{B_-} \right) - r_+^2 \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{B_+} \right) - \frac{1}{r^2}}{r_+^2 r_-^2 \left( \frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-} \right)} - \frac{1}{r^2} = C \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \tag{5.107}$$

と因数分解できる。係数  $C$  は両辺において  $r \rightarrow \infty$  の極限をとって比較することで、

$$C = \frac{r_+^2 \left( 1 - \frac{1}{B_+} \right) - r_-^2 \left( 1 - \frac{1}{B_-} \right)}{r_+ r_- \left( \frac{1}{B_+} - \frac{1}{B_-} \right)} \tag{5.108}$$

ここで、(5.49) のエディントン-ロバートソン展開より、

$$\frac{1}{B} = 1 + \frac{2GM}{r} + (2 - \beta - \gamma) \frac{2G^2 M^2}{r^2} + \dots \tag{5.109}$$

であるから、

$$C = 1 - (2 - \beta + \gamma) \left( \frac{GM}{r_+} + \frac{GM}{r_-} \right) + \dots \tag{5.110}$$

これらより、(5.105) 式は、1 次までで

$$\varphi - \varphi_- = \left[ 1 + \frac{1}{2}(2 - \beta + \gamma) \left( \frac{GM}{r_+} + \frac{GM}{r_-} \right) \right] \int_{r_-}^r \frac{dr}{r^2} \left[ 1 + \gamma \frac{GM}{r} \right] \left[ \left( \frac{1}{r_-} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_+} \right) \right]^{-1/2} \tag{5.111}$$

ここで、変数変換

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \sin \psi \quad (5.112)$$

によって積分を実行することができて、

$$\varphi - \varphi_- = \left[ 1 + \frac{1}{2} (2 - \beta + 2\gamma) \left( \frac{GM}{r_+} + \frac{GM}{r_-} \right) \right] \left( \psi + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \gamma \left( \frac{GM}{r_+} - \frac{GM}{r_-} \right) \cos \psi \quad (5.113)$$

となる。(5.112) 式より、遠日点  $r = r_+$  は  $\psi = \pi/2$  に対応するから、近日点移動の角度 (5.106) は、

$$\Delta\varphi = \frac{2 - \beta + 2\gamma}{3} \frac{6\pi GM}{L} \quad (\text{ラジアン/周期}) \quad (5.114)$$

ここで  $L$  は軌道力学で半直弦と呼ばれる量で、離心率  $e$  と軌道長半径  $a$  を用いて

$$\frac{1}{L} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-} \right) = \frac{1}{(1 - e^2)a} \quad (5.115)$$

と表される<sup>\*18</sup>。

近日点移動の式から分かるように、近日点移動は、半直弦が小さい(軌道長半径が小さく離心率が大きい)軌道の場合に大きくなる。水星の場合、軌道長半径が 57910000 km と小さく、離心率が 0.2056 と大きいので、近日点移動の観測による一般相対性理論の検証に適している。一般相対性理論からの予言は

$$\Delta\varphi = \frac{2 - \beta + 2\gamma}{3} \frac{6\pi GM}{(1 - e^2)a} \approx 0.1038 \quad (\text{秒/周期}) \quad (5.116)$$

である。水星は 1 世紀 = 100 年間に 415 回転するので、 $\Delta\varphi \approx 43$  (秒/世紀) となる(問題: 金星と地球の場合にはそれぞれ 8.6, 3.8 (秒/世紀) となることも確かめよ)<sup>\*19</sup>。一方、1943 年の報告によると、観測からは  $\Delta\varphi = 43.11 \pm 0.45$  秒/世紀である<sup>\*20</sup>。

## 5.A 5章の補足：時空の対称性の座標によらない定義

5.1.1 における時空の球対称性の議論は、特別な座標系に依ったものであった。一般相対性理論の精神である、座標系によらない”できるだけ幾何学的”な観点から時空の対称性について定義しよう。

### 5.A.1 定常時空

そのために、まずは時空が定常であることから考えよう。時空が定常であるということは、計量が時間によらない座標系をとることが”できる”ことである。一見 (5.26) 式の計量のように時間に依存するように見える場合でも、座標変換によって計量が時間によらないような時間軸がとれば時空は定常である。

4.3.2 節で議論したように、計量が時間によらない場合には時空に時間的な Killing ベクトル  $\xi^a$  が存在する。逆に、時間的な Killing ベクトル  $\xi^a$  が存在するとき、 $\xi^a$  で決まる時間的な曲線を時間軸として、曲線のパラメータ (ex. 固有時) を時間座標とすれば計量は時間によらなくなる。すなわち、

<sup>\*18</sup>  $r_{\pm} = (1 \pm e)a$

<sup>\*19</sup>  $\approx 5 \times 10^{-7}$  rad/周期 (0.24yr)  $\sim$  30 km/周期

<sup>\*20</sup> 実際に観測された水星の近日点移動は約 5600 秒/世紀である。このうち、5025.5 秒/世紀は地球に固定された座標系のずれ(天の赤道歳差)によるものである。また、実際には水星は太陽だけではなく太陽系の他の惑星からの影響を受けているので、その効果によっても近日点は移動する。Newton 力学における摂動展開によってこれらの影響を求めると、金星の影響が約 278 秒/世紀、地球の影響が約 90 /世紀、火星の影響が約 2.5 秒/世紀、木星の影響が約 154 秒/世紀、土星の影響が約 7 秒/世紀であり、天王星と海王星からの影響は極めて小さく、すべての合計は 531.5 秒/世紀である。これら摂動効果で説明できないずれが 43 秒/世紀で、一般相対性理論によって説明されるまで長らくの大問題であった。

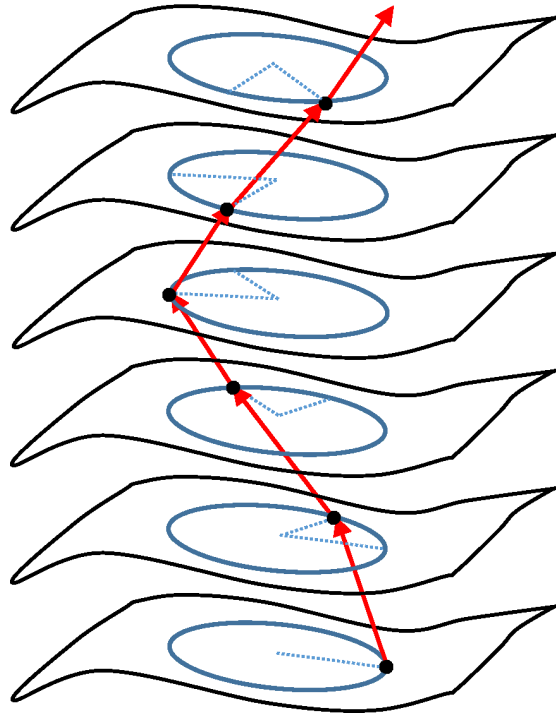


図 5.3 回転による時間軸の変化の概略図

—— 定常時空 ——

時空が定常であるための必要十分条件は、時空に時間的な Killing ベクトルが存在することである。

## 5.A.2 静的時空

太陽は回転しているが定常状態とみなせるように、定常時空では回転の存在が許される。回転が存在していると、時空線素に  $dt d\varphi$  なる項が現れる。実際、回転角速度を  $\Omega$  とすると、空間的な距離  $Ad\varphi$  に加えて、時間とともに  $\Omega dt$  余分に回転するから、角度方向の時空距離は

$$\Delta\varphi^2 \sim (Ad\varphi + \Omega dt)^2 \quad (5.117)$$

となる。

”定常時空”ときちんと区別して”静的時空”と定義したいが、どのようにすればよいだろうか。回転があると時間軸が時間一定面と垂直ではなくなるので、時間軸が時間一定面と垂直であるという条件で静的時空を定義してみよう。そのために、まず、超曲面<sup>\*21</sup>に直交するベクトル場を定義することから始めよう。

2次元平面でスカラー場が等高線となったように、4次元時空におけるスカラー関数は等値面、すなわち超曲面を定義する。

$$f(x^\alpha) = \sigma \quad (5.118)$$

ここで、 $\sigma$  は超曲面 (等値面) をラベルするパラメータである。超曲面上の任意の曲線  $C$  の接ベクトルを  $V^a$  とする。曲線上の点は超曲面上にあるから、

$$\sigma = f(x^\alpha + \epsilon V^a) = f(x^\alpha) + V^a \partial_a f \quad (5.119)$$

<sup>\*21</sup>時空における時間一定面は実際には空間であるが、2次元曲面を拡張したものと考えて超曲面 (hypersurface) と呼ぶ。

すなわち、

$$V^\alpha \partial_\alpha f = g_{\alpha\beta} V^\alpha \nabla^\beta f = 0 \quad (5.120)$$

となり、双対ベクトル  $\nabla_a f$  は超曲面に垂直である。したがって、ベクトル場と方向微分との間に 1 対 1 の対応があったように、超曲面に直交するベクトル場  $X^a$  とスカラー場の勾配には対応があるはずで、少なくとも超曲面  $f = \sigma$  の近傍で  $\nabla_a f$  を用いて、

$$X^a = \lambda(x^\alpha) \nabla^a f \quad (5.121)$$

となっていなければならない。このとき、偏微分の交換性から

$$X_{[a} \nabla_b X_{c]} = X_{[a} \partial_b X_{c]} = 0 \quad (5.122)$$

となることが示される ((3.26) 式も参照)。これがベクトル場がある超曲面に直交するための必要条件である。

Killing ベクトル場の場合、これが十分条件にもなっていることが次のように示される。Killing 方程式から、 $\nabla_a X_b = -\nabla_b X_a$  なので、(5.122) 式は

$$\begin{aligned} 0 &= X_a \nabla_b X_c + X_c \nabla_a X_b + X_b \nabla_c X_a \\ &= X^c [X_a \nabla_b X_c + X_c \nabla_a X_b + X_b \nabla_c X_a] \\ &= X_a X^c \nabla_b X_c + X^c X_c \nabla_a X_b - X_b X^c \nabla_a X_c \\ &= X_a X_c \nabla_b X^c - X^c X_c \nabla_b X_a - X_b X^c \nabla_a X_c \end{aligned} \quad (5.123)$$

最後の 2 式を加えると、

$$\begin{aligned} 0 &= X_a \nabla_b (X^c X_c) + X^c X_c (\nabla_a X_b - \nabla_b X_a) - X_b \nabla_a (X^c X_c) \\ &= X_a \partial_b (X^c X_c) + X^c X_c (\partial_a X_b - \partial_b X_a) - X_b \partial_a (X^c X_c) \end{aligned} \quad (5.124)$$

したがって、

$$\begin{aligned} X^c X_c \partial_a X_b - X_b \partial_a (X^c X_c) &= X^c X_c \partial_b X_a - X_a \partial_b (X^c X_c) \\ \partial_a \left( \frac{X_b}{X^2} \right) &= \partial_b \left( \frac{X_a}{X^2} \right) \end{aligned} \quad (5.125)$$

この式の可積分条件から、 $X_a/X^2$  は何らかの関数の勾配でなければならない。

$$X_a = X^2 \partial_a f \quad (5.126)$$

先の議論から、これは  $f = \sigma$  できまる超曲面に直交する。

以上より、Killing ベクトル場  $X^a$  が超曲面と直交する (hypersurface orthogonal Killing vector) 必要十分条件は

Killing ベクトル場  $X^a$  が超曲面と直交する必要十分条件

$$X_{[a} \nabla_b X_{c]} = 0 \quad (5.127)$$

である。

時間的な Killing ベクトル  $\xi^a$  を持つ定常時空において、 $\xi^a$  を時間座標基底に選べば、 $\xi^\mu = \delta^\mu_0$  であり、 $\xi_\mu = g_{\mu\nu} \xi^\nu = g_{0\mu}$  および  $X^a X_a = g_{00}$  である。したがって、(5.126) 式から  $g_{0\mu} = g_{00} \partial_\mu f$  となるスカラー場  $f$  が存在する。これは  $\mu = 0$  のとき  $\partial_0 f = 1$  を意味するから、 $f = x^0 + h(x^i)$  となる。ここで、

$$x^0 \longrightarrow x'^0 = x^0 + h(x^i) \quad (5.128)$$



と座標変換すると、

$$g'_{0\mu} = 0 \quad (5.129)$$

とすることができる。したがって、

—— 静的時空 ——

時空が静的であるための必要十分条件は、時空に超曲面と直交する時間的な Killing ベクトル  $\xi^a$  が存在することである。

とすることができるであろう。

### 5.A.3 球対称時空

最後に時空が球対称であることを幾何学的に定義しておこう。球対称時空では、空間の3軸周りの回転対称性がなければならない。すなわち時空に線形独立な3種類の(超曲面と直交する) Killing ベクトル場が存在し、その Killing ベクトル場を接ベクトルとする曲線が  $SO(3)$  群の軌道となること、すなわち、Killing ベクトル場による点変換が  $SO(3)$  と同じ対称性を持つことが、時空が球対称であることの必要十分条件である。

## 5章の問題

1. 座標変換により (5.1) の計量から (5.3) の計量へ変換できることを示せ。
2. (5.3) の計量に対するクリストッフェル記号と、この座標系におけるリッチテンソルのゼロでない成分を求めよ。
3. 等方座標における計量 (5.36) 式を導出せよ。また、その弱重力場展開を求めよ。
4. (5.97) 式を示せ。
5. 太陽表面と木星表面ギリギリを通る光線の曲がり角を求めよ。
6. (5.111) 式の積分を実行せよ。
7. (5.114) 式を示せ。
8. 水星、金星および地球について一般相対論的效果による近日点移動の値を計算せよ。



## 第 6 章

# Schwarzschild ブラックホール

一般相対性理論は数々の (古典的) テストをクリアしており、少なくとも重力がそれほど強くない範疇では正しい結果を与える理論であるといえる。そこで、今度は重力が強い極限について考えよう。本節では Schwarzschild ブラックホールの時空構造について議論する。

### 6.1 Schwarzschild 時空の構造

Schwarzschild 時空の計量 (5.39) で記述される時空の (因果) 構造について調べよう。まず、 $r = r_g$  で  $g_{rr}$  が発散しており、時空がそこでおかしくなっている様に見える。しかし、局所慣性系において  $g_{ab} = \eta_{ab}$ 、 $\Gamma^c_{ab} = 0$  とできたことから類推されるように、計量の特異な振る舞いから、直ちに時空そのものが特異な構造を持つと結論付けることはできない。実際、曲率不変量

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{12r_g^2}{r^4} \quad (6.1)$$

はそこで発散していない。一方、 $r = 0$  では  $g_{tt}$  が発散しているが、ここでは曲率不変量が発散しており、時空に特異点があらわれている。 $r = r_g$  にあらわれる見かけの特異性は何を意味するのであろうか？

#### 6.1.1 ブラックホール : Eddington-Finkelstein 座標

時空の構造にとって、もっとも重要なのは因果構造である。そのためには光の測地線 (光円錐)、すなわち null 測地線の振る舞いを調べる必要がある。null 測地線が調べやすくなるように、計量を null 座標を使ってあらわそう。今、動径方向 ( $d\theta = d\varphi = 0$ ) の null 測地線 ( $ds^2 = 0$ ) を考える。

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \quad (6.2)$$

ここで、内向き (-) の null 測地線を考えて、

$$t = -r - r_g \ln \left[ \frac{|r - r_g|}{r_g} \right] = -r - r_g \ln |r - r_g| + \text{const.} \quad (6.3)$$

null 測地線が  $45^\circ$  の方向  $d\bar{t}/dr = -1$  となるように、新しい時間座標を

$$\bar{t} = t + r_g \ln |r - r_g| \quad (6.4)$$

で導入する。微分をとれば

$$d\bar{t} = dt + \frac{r_g}{r - r_g} dr \quad (6.5)$$

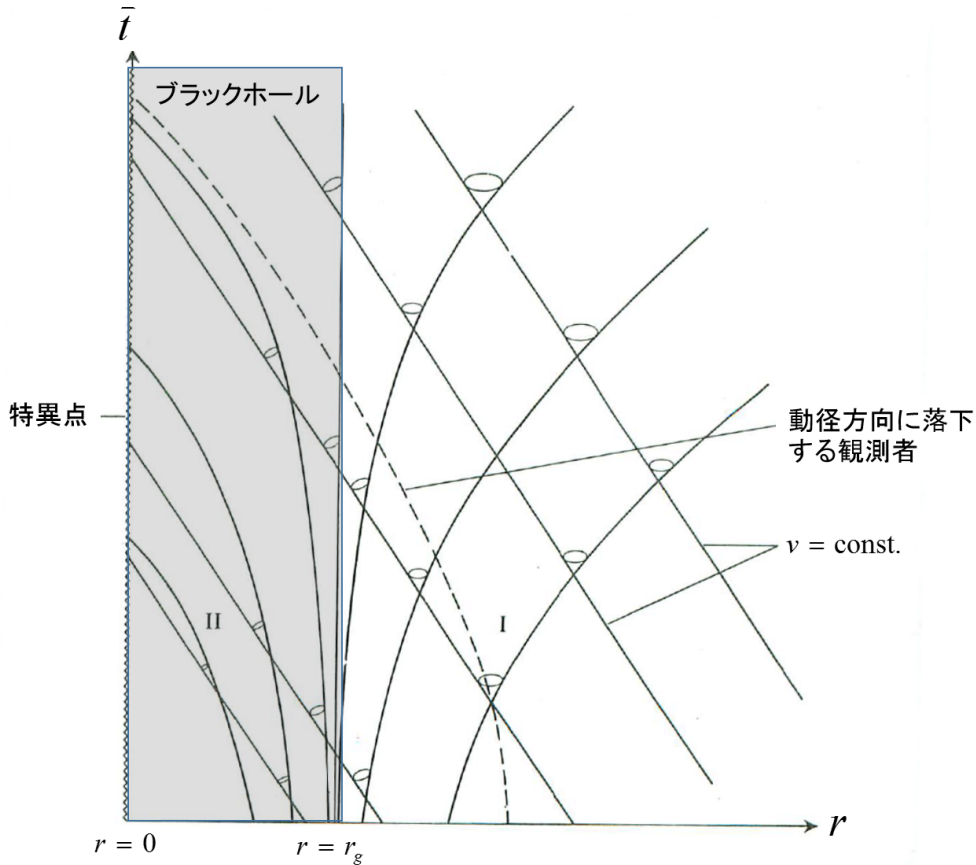


図 6.1 Eddington-Finkelstein 座標における Schwarzschild ブラックホールの概略図

であるから<sup>\*1</sup>、時空の計量は

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) d\bar{t}^2 + \frac{2r_g}{r} d\bar{t}dr + \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega \tag{6.6}$$

となる。この座標系 (Eddington-Finkelstein coordinate) では、 $r = r_g$  に見られた見かけの特異性がなくなっている。すなわち、以前の座標系 (Schwarzschild 座標) の有効領域は  $r_g < r < \infty$  であり、 $r \leq r_g$  は座標系の適用範囲外であったのに対し、時間を張り替えた新しい座標は  $0 < r < \infty$  がその適用領域となっている。

Eddington-Finkelstein 座標を用いて時空の構造を解析しよう。内向きの null 座標を

$$v \equiv \bar{t} + r \tag{6.7}$$

によって導入すると、

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega \tag{6.8}$$

となる。 $v$  の定義から明らかなように、内向きの null 測地線 ( $ds^2 = 0$ ) は、 $v = \text{一定}$  で与えられる。一方、外向きの null 測地線は

$$dr = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dv \tag{6.9}$$

<sup>\*1</sup>  $r - r_g$  の正負に依らずにこの形にできることに注意。

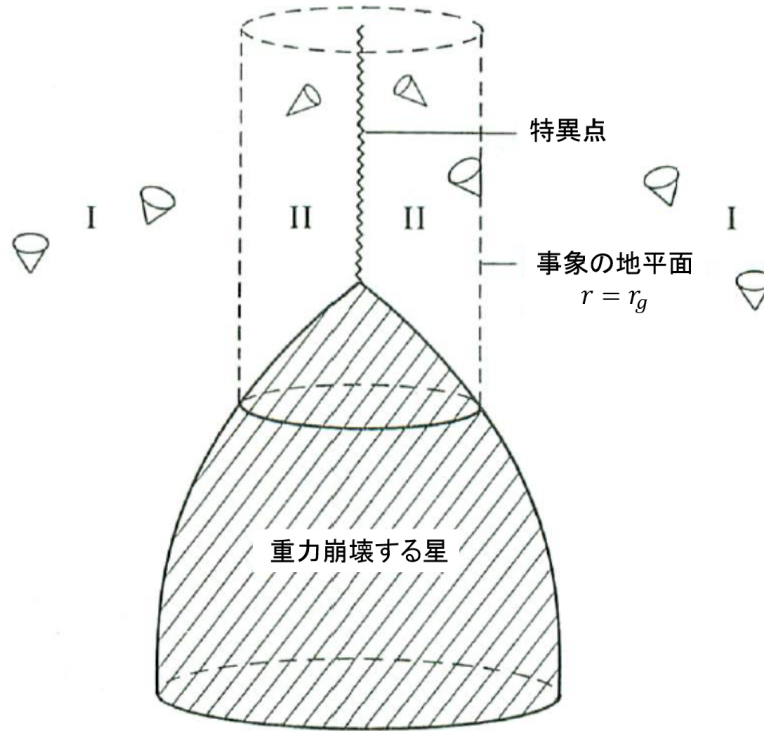


図 6.2 Eddington-Finkelstein 座標における重力崩壊の模式図

となる。

無限遠方では  $dr = dv/2 = (d\bar{t} + dr)/2$  であるから外向きの null 測地線は “+45°” の直線へと漸近する。しかしながら、 $r = r_g$  に近づくにつれて  $dr$  の刻みは遅くなり、 $r = r_g$  では外向きの null 測地線にそって  $r$  は増えなくなる！ さらに、 $r_g$  の内側では、光は外に進むことさえ許されない (図 6.1 参照)。すなわち光は  $r \leq r_g$  から出てくることはできない。よって、 $r = r_g$  を事象の地平面 (event horizon) と呼び、事象の地平面を持つ時空をブラックホール時空、 $r \leq r_g$  の領域 (II) をブラックホールと呼ぶ\*2。

Eddington-Finkelstein 座標において星が重力崩壊してブラックホールが形成される様子を図示すると図 6.2 のようになる。特異点ができる前に事象の地平面が形成されていることに注意しよう。すなわち、特異点を観測できる外部観測者は存在しない。このことは次節のクルスカルダイアグラムによってより明確になる。

### 6.1.2 ホワイトホール

Schwarzschild 計量が時間反転 ( $t = -t$ ) について形を変えないので、以上の議論を時間反転して行うことが可能である。すなわち、外向きの null 測地線

$$t = r + r_g \ln \left[ \frac{|r - r_g|}{r_g} \right] = r + r_g \ln |r - r_g| + \text{const.} \quad (6.10)$$

\*2ここでのブラックホールの定義は強く座標系によるものであるから、“できるだけ幾何学的に”の精神からすると満足のゆくものではないかもしれない。しかし、座標に依らずブラックホールを定義するために必要な数学とその議論は少々難しいので、本講義では割愛する。興味のある人は Wald, R. M. (1984) “General Relativity” の 12 章を参照すること。

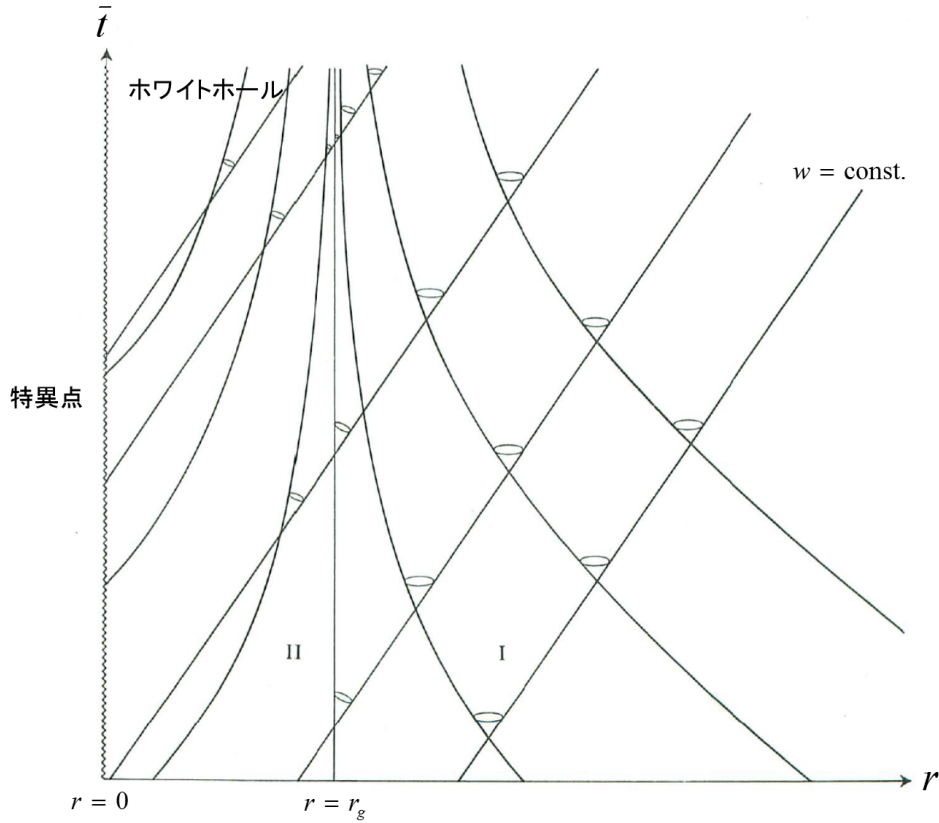


図 6.3 Eddington-Finkelstein 座標における Schwarzschild ホワイトホールの概略図

を考え、null 測地線が“+45°”の方向となるように、新しい時間座標を

$$\tilde{t} = t - r_g \ln|r - r_g| \tag{6.11}$$

で導入した後、外向きの null 座標を

$$w \equiv \tilde{t} + r \tag{6.12}$$

によって導入すると、

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dw^2 - 2dwdr + r^2 d\Omega \tag{6.13}$$

となる。外向きの null 測地線は、 $w = \text{一定}$ で与えられる。一方、内向きの null 測地線は

$$dr = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dw \tag{6.14}$$

無限遠方では  $dr = -dw/2 = -(d\tilde{t} - dr)/2$  であるから内向きの null 測地線は“-45°”の直線へと漸近する。しかしながら、 $r = r_g$  に近づくにつれて  $dr$  の刻みは遅くなり、 $r = r_g$  では内向きの null 測地線にそって  $r$  は減らなくなってくる。すなわち光は  $r = r_g$  の内側に入ることはできない。さらに、 $r_g$  の内側では、光は内側に進むことが許されなくなる。この場合、 $r \leq r_g$  の領域をホワイトホールと呼ぶ(図 6.3 参照)。

### 6.1.3 Kruskal diagram

(6.2) 式において、時間座標ではなく、動径座標を

$$r_* = r + r_g \ln \left| \frac{r}{r_g} - 1 \right| \tag{6.15}$$

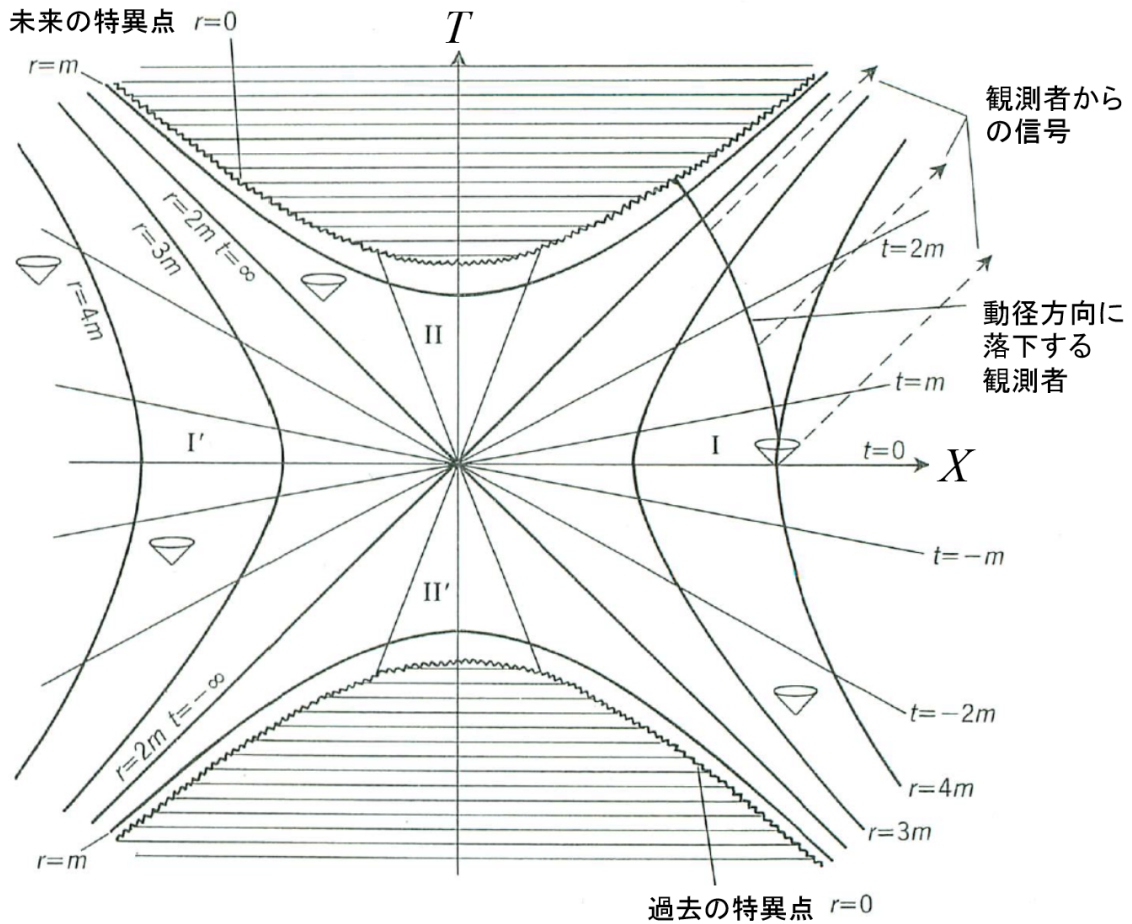


図 6.4 Schwarzschild 時空の Kruskal diagram

によって導入すると、外向き・内向きの null 測地線を両方とも同等に取り扱える。 $r_*$  を用いると、計量は、

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (-dt^2 + dr_*^2) + r^2 d\Omega \tag{6.16}$$

となる。さらに、外向き及び内向きの null 座標を

$$U = t - r_*, \tag{6.17}$$

$$V = t + r_* \tag{6.18}$$

によって導入すると、

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dUdV + r^2 d\Omega \tag{6.19}$$

を得る。

ここで、 $(U, V)$  座標の観点からは、 $r = r(U, V)$  は

$$\frac{1}{2}(V - U) = r_* = r + r_g \ln\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) \tag{6.20}$$

によって定義される関数であると考え<sup>\*3</sup>。すると、

$$1 - \frac{r_g}{r} = \frac{r_g}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_g}\right) \exp\left(\frac{V-U}{2r_g}\right) \quad (6.22)$$

であるから、時空計量は、

$$ds^2 = -\frac{r_g}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_g}\right) \exp\left(\frac{V-U}{2r_g}\right) dU dV + r^2 d\Omega \quad (6.23)$$

となる。

もう少し見やすい形にするために、さらなる座標変換

$$U' = -\exp\left(-\frac{U}{2r_g}\right), \quad (6.24)$$

$$V' = \exp\left(\frac{V}{2r_g}\right) \quad (6.25)$$

の後、

$$T = \frac{1}{2}(U' + V'), \quad (6.26)$$

$$X = \frac{1}{2}(V' - U') \quad (6.27)$$

により時間空間座標を導入すると、

$$ds^2 = \frac{4r_g^3}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_g}\right) [-dT^2 + dX^2] + r^2 d\Omega \quad (6.28)$$

となる。これが Kruskal 座標における Schwarzschild 計量である。もともとの  $(t, r)$  座標と  $(T, X)$  座標の変換則は

$$\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{r_g}\right) = X^2 - T^2, \quad (6.29)$$

$$\frac{t}{r_g} = \ln\left(\frac{T+X}{T-X}\right) \quad (6.30)$$

で与えられる (問題：時空図を描け)。

(6.29) 式から分かるように、Schwarzschild 座標での事象の地平面  $r = r_g$  は、Kruskal 座標では  $X^2 - T^2 = 0$  となり null 面になっている。座標変換によって、null 面は null 面に移ることに注意すると ( $ds^2 = 0$  は座標変換で保存される)、事象の地平面は実は null 面であることになる。Schwarzschild ブラックホールに限らず、より一般に、ブラックホールの事象の地平面は null 面になっている<sup>\*4</sup>。

## 6.2 ブラックホールまわりの軌道

ブラックホールまわりで  $\theta = \pi/2$  面における運動を考えよう。いま、軌道が (粒子の場合には固有時  $\tau$ 、光線の場合にはアフィンパラメータ  $\lambda$  でパラメータ付けされているとする。これは (5.82) 式において、運

<sup>\*3</sup>  $r_*$  の定義からは

$$\frac{1}{2}(V-U) = r_* = r + r_g \ln\left|\frac{r}{r_g} - 1\right| \quad (6.21)$$

となるが、 $r/r_g - 1 > 0$  としても一般性を失わない。

<sup>\*4</sup> この事実は一般的に証明することが可能であり、ブラックホールの事象の地平面が (外向きの) null 面であることから、そこを (内から外に) 横切るためには光速を超えた (非因果的な) 運動が必要になるのである。



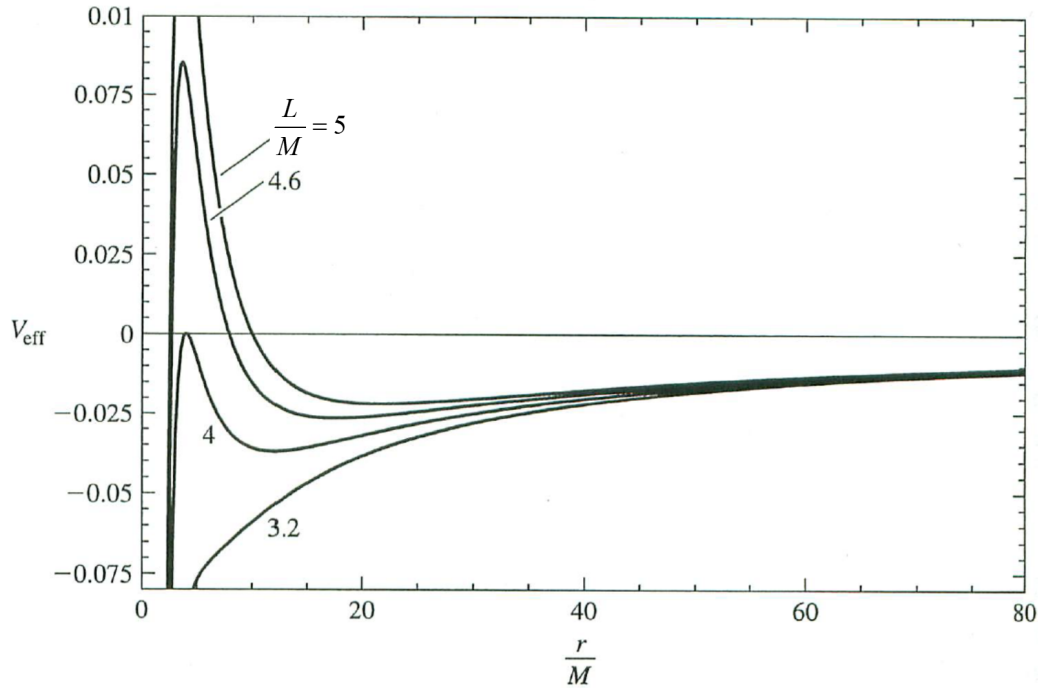


図 6.5 異なる  $L/M$  の値に対する  $V_{\text{eff}}$  のグラフ。

動の定数を

$$H = \begin{cases} 1 & (\text{粒子}) \\ 0 & (\text{光子}) \end{cases} \quad (6.31)$$

と選んだことに対応する。

以下では座標の微分をドット・であらわすが、これは

$$\dot{x}^\mu = \begin{cases} \frac{dx^\mu}{d\tau} & (\text{粒子}) \\ \frac{dx^\mu}{d\lambda} & (\text{光子}) \end{cases} \quad (6.32)$$

ように、粒子と光子でそれぞれ固有時とアフィンパラメータによる微分を意味するものとする。

運動の定数

静的球対称時空には時間的 Killing ベクトル  $\xi^a = (\partial/\partial t)^a$  と回転の Killing ベクトル  $\eta^a = (\partial/\partial \phi)^a$  が存在するので、

$$E = -g_{ab}\xi^a u^b = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}, \quad (6.33)$$

$$L = g_{ab}\eta^a u^b = r^2 \dot{\phi} \quad (6.34)$$

が運動の定数である。

有効ポテンシャル

Schwarzschild 計量の場合には、(5.83) 式より

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(H + \frac{L^2}{r^2}\right) = \frac{1}{2}E^2 \quad (6.35)$$

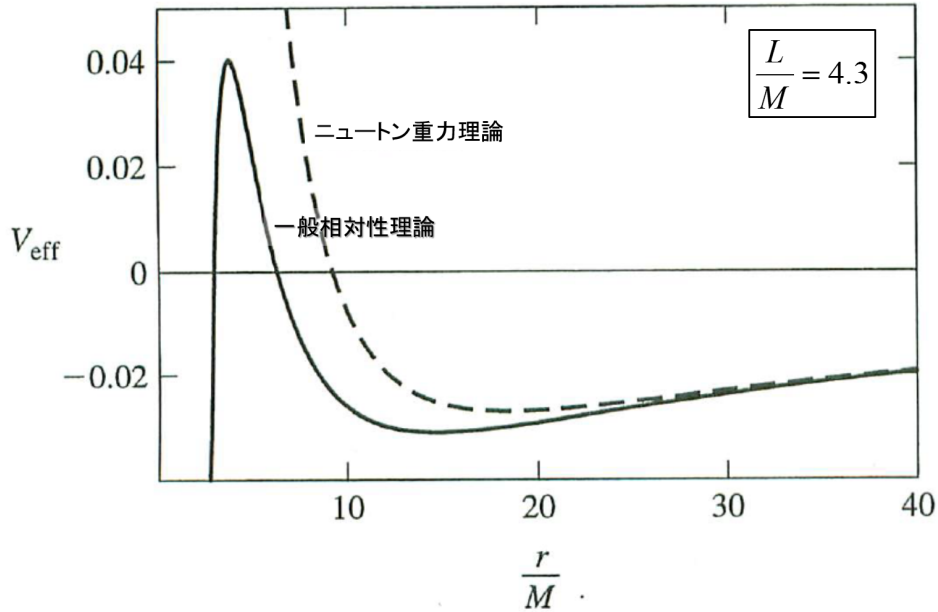


図 6.6  $L/M = 4.3$  の場合の一般相対性理論におけるポテンシャル  $V_{\text{eff}}$  とニュートン重力理論のポテンシャルの比較。ニュートン重力理論では遠心力ポテンシャルによる障壁が存在する。

となるので、軌道の有効ポテンシャルを、

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right) \left( H + \frac{L^2}{r^2} \right) \\ &= \frac{H}{2} - H \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3} \end{aligned} \quad (6.36)$$

で定義する\*5。

Schwarzschild 計量における有効ポテンシャル  $V_{\text{eff}}$  は、ニュートン重力項  $(-HM/r)$  と、遠心力ポテンシャル項  $(L^2/2r^2)$  に加えて、一般相対性理論による補正項  $(-ML^2/r^3)$  からなる。ニュートン重力項は質量を持つ粒子のみにはたらき、光子の場合には存在しない。一方、遠心力ポテンシャル項および一般相対論の補正項は粒子と光子の両方にはたらく。

遠心力ポテンシャル項はニュートン重力項よりも半径の小さいところで大きく、従って、ニュートン重力理論では、どんなに小さい角運動量でも十分小さい半径のところで重力と釣り合うことが可能である。一般相対論の補正項は、小さい半径のところで遠心力ポテンシャル項を凌駕することに注意しよう (図 6.5, 6.6 参照\*6)。これは一般相対論の効果により重力が強くなることの端的なあらわれである。

## 6.2.1 粒子の軌道

まず粒子の軌道 (時間的測地線)  $H = 1$  の場合について考えよう。有効ポテンシャルの極値は

$$0 = \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial r} = \frac{1}{r^4} [GMr^2 - L^2r + 3GML^2] \quad (6.37)$$

\*5 ここで、定数因子  $E^2/2$  は有効ポテンシャルから除いておいた。

\*6 本節の図は Hartle, J.B. (2003) "Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity" (Addison Wesley) から引用している。

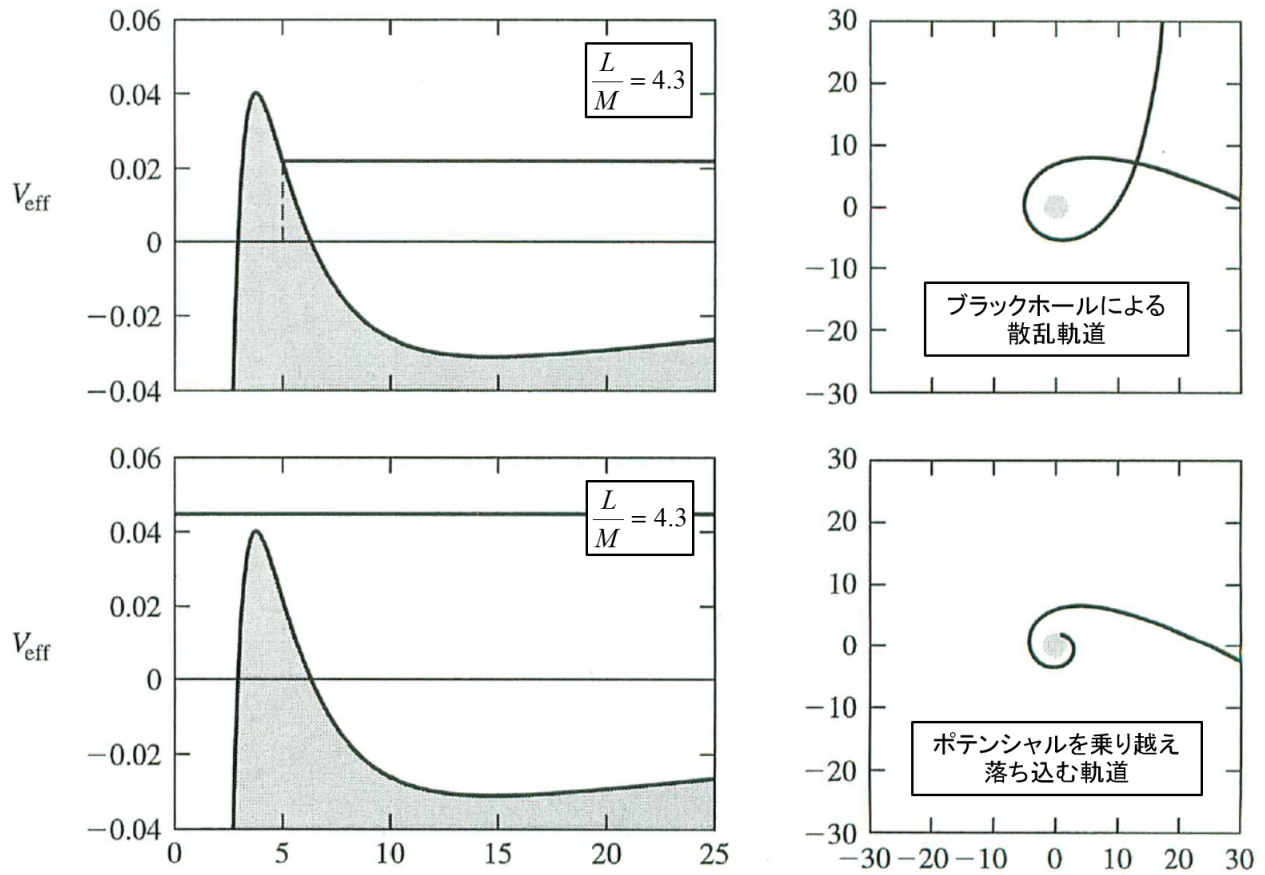


図 6.7 遠方からブラックホールへ向かう粒子の軌道。

より、

$$R_{\pm} = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12L^2GM^2}}{2GM} \tag{6.38}$$

の半径のところで極値となる。

$L^2 < 12(GM)^2$  の粒子

極値をとる位置は  $L/M$  の値によって異なる (図 6.5 参照)。 $L^2 < 12(GM)^2$  の場合には (6.38) 式より  $R_{\pm}$  が複素数となるが、これは  $L^2 < 12(GM)^2$  において有効ポテンシャルが極致を持たないことを意味する。

このことは、 $L^2 < 12(GM)^2$  の角運動量しか持たずにブラックホールへと落下する粒子は、安定的な円軌道を描くこと無く、ブラックホールへと吸い込まれてしまうことを意味する。

簡単のために  $L = 0$  で遠方で静止 ( $E = 1$ ) していた粒子を考えると、(6.35) 式より

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 = \frac{GM}{r} \tag{6.39}$$

落ち込む粒子を考えているので、

$$\sqrt{r} dr = -\sqrt{2GM} d\tau \tag{6.40}$$

を積分して、

$$r(\tau) = \left[ \frac{9}{2} GM (\tau_0 - \tau)^2 \right]^{1/3} \tag{6.41}$$

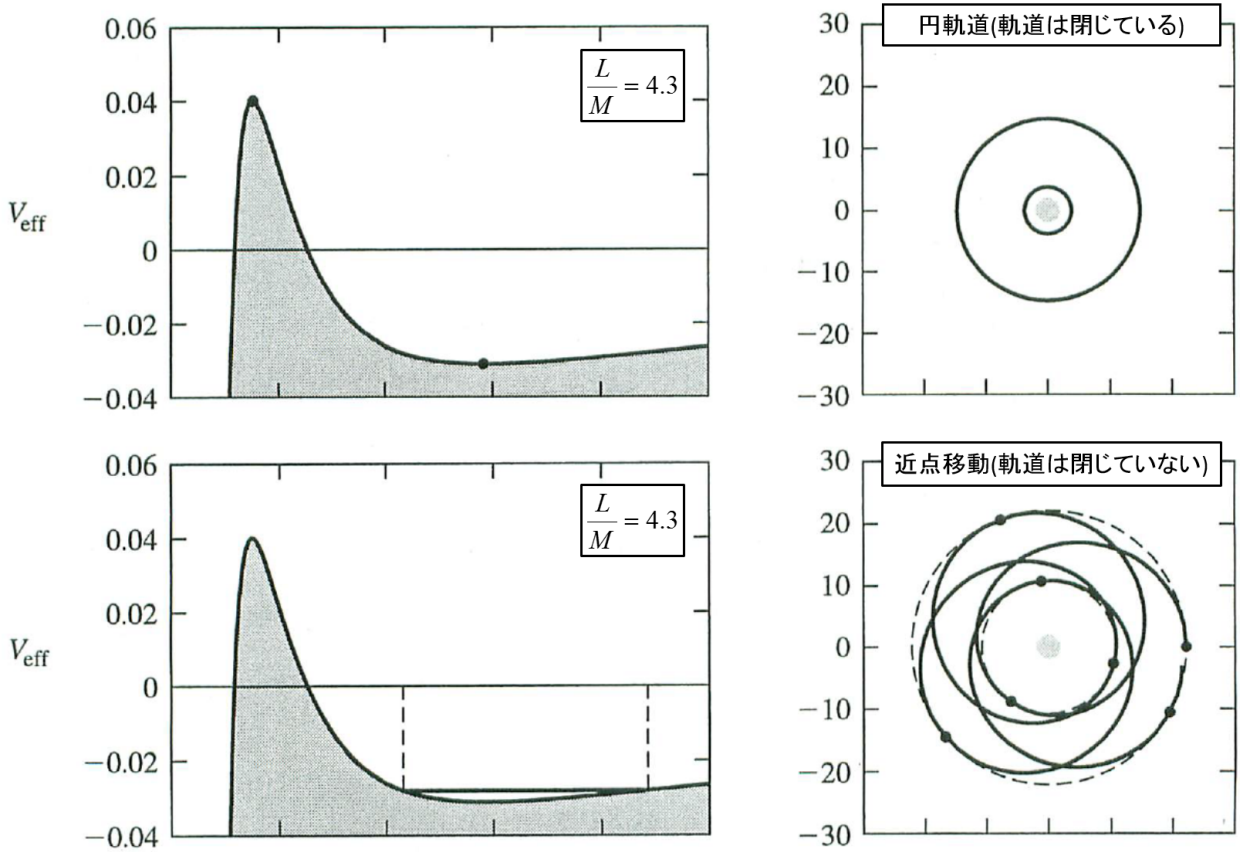


図 6.8 ブラックホール周りの粒子の束縛軌道。

ここで  $\tau_0$  は  $r = 0$  となる時刻である。すなわち、粒子は有限の固有時間でブラックホールへと吸い込まれ、 $r = 0$  にある特異点にぶつかってしまう。

また、(6.33) と (6.40) 式より ( $E = 1$  として)、

$$dt = - \left( \frac{2GM}{r} \right)^{-1/2} \left( 1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr \tag{6.42}$$

これを積分すれば (問題：ヒント  $x = \sqrt{2GM/r}$  と変数変換)、

$$t = t_1 + 2GM \left[ -\frac{2}{3} \left( \frac{r}{2GM} \right)^{3/2} - 2\sqrt{\frac{r}{2GM}} + \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{r}{2GM} + 1}}{\sqrt{\frac{r}{2GM} - 1}} \right| \right] \tag{6.43}$$

となる。すなわち、 $r = 2GM$  に到達するために、座標時間では無限の時間がかかる\*7。

### $L^2 > 12(GM)^2$ の粒子

一方、 $L^2 > 12(GM)^2$  の角運動量を持つ粒子の場合には、ブラックホールの有効ポテンシャルによって散乱されるかどうかは、粒子の持つエネルギーに依存して決まる。粒子のエネルギーがポテンシャル障壁を乗り越えるほど大きくない場合 (角運動量の効果が相対的に大きい場合)、遠方から落ち込んできた粒子

\*7ただし、実際には有限の時間でブラックホールのごく近傍までは到達できる。 $r = 2GM$  の 100 倍の半径から、 $r = 2GM$  の 10% 外側まで到達するために必要な時間を計算してみよ。

は、ブラックホールポテンシャルによって遠方へと散乱される (図 6.7(a) 参照)。粒子のエネルギーがポテンシャルの極大値  $V(R_-)$  よりも大きい場合には、ポテンシャル障壁を乗り越えてブラックホールへと落ち込む (図 6.7(b) 参照)

さらに、 $L^2 > 12(GM)^2$  の角運動量を持つ粒子の場合には、 $r = R_+$  において安定な円軌道  $\dot{r} = 0$  が可能である (図 6.8(a) 参照)。 $r = R_-$  における円軌道は不安定である。なぜならば、 $\partial^2 V_{\text{eff}}/\partial r^2$  を計算してみれば直ちに分かるように、 $r = R_+$  で  $V_{\text{eff}}$  は極小、 $r = R_-$  で極大となるからである。

円軌道では

$$\dot{r} = 0 \quad (6.44)$$

$$\partial V_{\text{eff}}/\partial r = 0 \quad (6.45)$$

の両条件が満たされなければならない。これら 2 条件より円軌道となる場合の粒子のエネルギーと角運動量が求まる。具体的に (6.35) と (6.37) 式から計算すると、

$$L^2 = \frac{GM R^2}{R - 3GM}, \quad (6.46)$$

$$E^2 = \frac{(R - 2GM)^2}{R(R - 3GM)} \quad (6.47)$$

である。ここで  $R$  は  $R_{\pm}$  のいずれかをあらわす。これら 2 式の分母をみれば、円軌道は  $R > 3GM$  で存在できることがわかる。

一方、安定円軌道は、 $L^2 > 12(GM)^2$  の場合にのみ存在できるので、(6.46) 式より

最内安定円軌道 (ISCO: Innermost Stable Circular Orbit)

$$R_+ > R_{\text{ISCO}} = 6GM \quad (6.48)$$

の領域にしか存在できない。

この結果は不安定円軌道の存在可能領域が

$$3GM < R_- < 6GM \quad (6.49)$$

であることも意味する。

### 最内安定円軌道 (ISCO) の存在と天体物理学

一般相対論的天体物理学としては ISCO の存在する意味は大きい。ブラックホールは宇宙最大規模の水力発電所とみなせるものである\*<sup>8</sup>。実際、宇宙において、周囲の物質 (ガス) が集められ、ブラックホールの回りに降着円盤と呼ばれる構造が作られている。この降着円盤が明るく輝いたりするわけであるが、ISCO がある場合にはそこからは安定な円軌道が存在しないため、ガスはブラックホールへと落ち込んでしまい、降着円盤に穴があいてしまう。これが電磁波の観測によって確かめられれば、ブラックホールの質量などの情報が得られる可能性がある。

円軌道でない場合にも、ポテンシャル井戸による束縛運動が可能である (図 6.8(b) 参照)。この場合、一般には粒子の軌道は閉じず、また、軌道の近点移動が起こる。ここで、水星の近日点移動が起こる理由につ

\*<sup>8</sup>(6.47) 式より、ISCO におけるエネルギーは  $E^2 = 8/9$  となり、1 よりも小さい。この差が重力エネルギーであるから、遠方から ISCO まで粒子を落とすと  $E_B = 1 - E = 1 - \sqrt{8/9} \approx 0.06$  の質量エネルギーが開放される。これと核融合反応における質量欠損値を比較せよ。

いて定性的に述べておこう。安定円軌道にある粒子に少しの摂動が加わった場合、粒子は  $r = R_+$  の軌道の周りを振動する。十分摂動が小さければ、振動は単純な調和振動子のものとなり、その振動数は

$$\omega_r = \left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial r^2} \right|_{R_+} = \frac{GM(R_+ - 6GM)}{R_+^3(R_+ - 3GM)} \quad (6.50)$$

となる。一方、回転運動の周期は、

$$\omega_\varphi^2 = \frac{L^2}{R_+^4} = \frac{GM}{R_+^2(R_+ - 3GM)} \quad (6.51)$$

である。これら2つの振動数が一致(正確には整数倍)しない場合には、軌道が閉じずに歳差運動が起こるのである。Newton 極限  $R_+ \gg GM$  として、歳差運動の角速度は、円軌道の場合に、

$$\omega_p = \omega_\varphi - \omega_r = - \left[ \sqrt{1 - \frac{6GM}{R_+}} - 1 \right] \omega_\varphi \approx \frac{3(GM)^{3/2}}{R_+^{5/2}} \quad (6.52)$$

となる。これは先に導いた楕円軌道の場合の式と一致する。

## 6.2.2 光子の軌道

ブラックホール近傍における光子の軌道 ( $H = 0$ ) を考える。この場合には、有効ポテンシャルは

$$V_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2r^3}(r - 2GM) \quad (6.53)$$

と簡単なものになり、有効ポテンシャルは  $r = 3GM$  で極大値(かつ最大値)を一つとり、極小値はとらない。すなわち、光の軌道の場合、ブラックホール周りの円軌道は存在するが、その軌道は不安定であり、摂動によってブラックホールへと落ち込むか、無限遠へと離れ去るかしてしまう(図 6.9(a) 参照)。

ポテンシャル障壁は  $r = 3GM$  で最大値をとるので、それを乗り越えるために必要なエネルギーは、

$$\frac{1}{2}E^2 = V(r = 3GM) = \frac{1}{2} \frac{L^2 GM}{27(GM)^3} \quad (6.54)$$

つまり、

$$\frac{L^2}{E^2} = 27G^2 M^2 \quad (6.55)$$

(5.89) 式で導入したように、 $b \equiv L/E$  によって、静止質量込みの相対論的粒子に対する衝突パラメータを定義すると、無限遠からの光線がブラックホールの中心から測って

$$b_{\text{cap}} = 3\sqrt{3}GM \quad (6.56)$$

の内側に照射された場合、ポテンシャルを乗り越えてブラックホールへと落ち込んでしまう。である。衝突断面積でいえば、

$$\sigma = \pi b_{\text{cap}}^2 = 27\pi(GM)^2 \quad (6.57)$$

である。

無限遠からだけでなく、ブラックホールの近傍から照射された光線についても、その脱出の可否を考えることにすると、それらは以下のようにまとめられる。

1. 無限遠からブラックホールへと落ち込む、ポテンシャル障壁よりも小さいエネルギーしか持たない光子はブラックホールによって散乱され(軌道を曲げられ; 図 6.9(b) 参照)、高いエネルギーを持つ光子(すなわち  $b < b_{\text{cap}}$  の光子)はブラックホールへと囚われてしまう(図 6.9(c) 参照)。

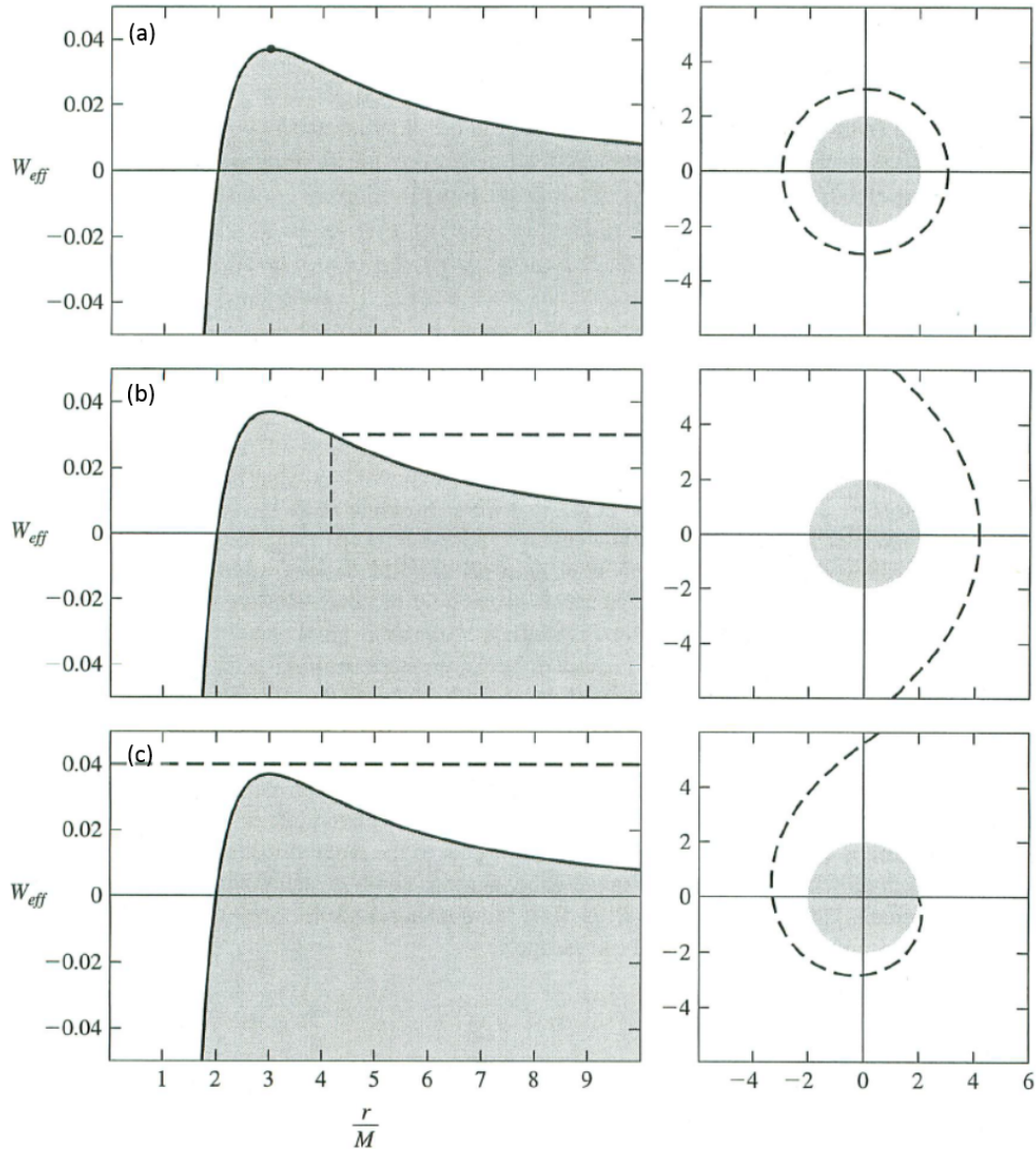


図 6.9 ブラックホール周りの光子の軌道 ( $r \geq 3M$ )。

2. 一方、 $2GM < r \leq 3GM$  から外向きに向かう光子は、ポテンシャル障壁を乗り越えられる場合、すなわち  $b < b_{\text{cap}}$  の場合にブラックホールに囚われることなく脱出できるが、そうでない場合にはブラックホールへと引きずり戻されてしまう (図 6.10 参照)。

ブラックホール近傍の観測者 (局所慣性系) にとっての光子の運動を考えよう。ブラックホール近傍の局所慣性系  $\{(\hat{e}_{\hat{\alpha}})^a\}$  は、

$$(\hat{e}_{\hat{t}})^a = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a, \tag{6.58}$$

$$(\hat{e}_{\hat{r}})^a = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{1/2} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a, \tag{6.59}$$

$$(\hat{e}_{\hat{\theta}})^a = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^a, \tag{6.60}$$

$$(\hat{e}_{\hat{\varphi}})^a = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^a. \tag{6.61}$$

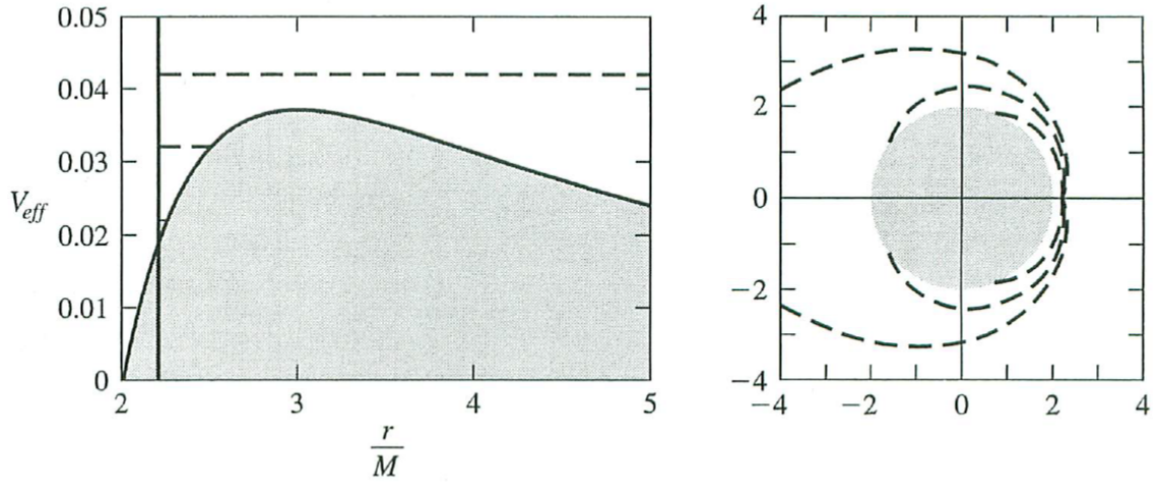


図 6.10  $r < 3M$  から照射された光子の運命。

で与えられる。実際、この基底では、

$$g_{ab}(\hat{e}_{\hat{t}})^a(\hat{e}_{\hat{t}})^b = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} g_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} g_{tt} = -1 \quad (6.62)$$

等が成り立っており、

$$g_{ab}(\hat{e}_{\hat{\alpha}})^a(\hat{e}_{\hat{\beta}})^b = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \quad (6.63)$$

と局所的に正規直交系をなしている。これを四脚場 (Tetrad) と呼ぶ。

この局所慣性系で見て、球対称に光子を照射することを考えよう。光子の速度ベクトルを

$$v^{\hat{\phi}} = \sin \psi, \quad (6.64)$$

$$v^{\hat{r}} = \cos \psi, \quad (6.65)$$

と置こう。 $v^{\hat{\phi}}$  は

$$\begin{aligned} v^{\hat{\phi}} &= \frac{u^{\hat{\phi}}}{u^{\hat{t}}} = \frac{g_{ab}u^a(\hat{e}_{\hat{\phi}})^b}{g_{ab}u^a(\hat{e}_{\hat{t}})^b} = \frac{\frac{1}{r}u^\varphi g_{ab}u^a(\partial_\varphi)^b}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1/2} g_{ab}u^a(\partial_t)^b} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{1/2} \frac{1}{r} \frac{L}{E} \\ &= \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{1/2} \frac{b}{r} \end{aligned} \quad (6.66)$$

さて、ブラックホール遠方から内向きに向かう光子 ( $v^{\hat{r}} = \cos \psi < 0$  ( $\psi > 90^\circ$ )) を考える。先に示したとおり、 $b > 3\sqrt{3}GM$  の場合にブラックホールへと捕われずにすむが、この条件を内向きのどの方向に照射された光子が捕われずに済むかという条件に焼き直すことができる。すなわち、(6.64), (6.66) 式より、

$$\sin \psi > \frac{3\sqrt{3}GM}{r} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{1/2} \quad (6.67)$$

この条件は ISCO ( $r = 6GM$ ) のときには  $\psi < 135^\circ$  であるが、 $r = 3GM$  で  $\sin \psi = 1$  すなわち  $\psi = 90^\circ$  となるので、内向きに進む光子は  $r = 3GM$  の内側で照射された場合にはすべてブラックホールへと吸い込まれる。



一方、ブラックホールの近傍から外向きに向かう光子の場合 ( $\psi < 90^\circ$ )、 $b < 3\sqrt{3}GM$  の場合にポテンシャル障壁を乗り越えてブラックホール重力圏から脱出できる。その条件は、

$$\sin \psi < \frac{3\sqrt{3}GM}{r} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{1/2} \quad (6.68)$$

すなわち、 $r \geq 3GM$  の場合には外向きに進む光子のすべてが脱出可能であるが、半径の減少とともに脱出できる光子は減っていき、 $r = 2GM$  でちょうどすべての光子が脱出不可能となる。

## 6章の問題

1. Kruskal 座標を導出せよ。
2. Kruskal 座標における時空図を描け。
3. (6.43) 式を導出せよ。
4. 安定円軌道が  $L > 12GM$  の場合にのみ存在できることを説明せよ。このことから、 $R = 6GM$  より内側には安定円軌道は存在しないことを示せ。
5. ブラックホール”水力発電”のエネルギー効率と核融合反応のエネルギー効率を比べよ。太陽がブラックホールになる場合に解放されるエネルギーはどれくらいか?
6. 光子の場合  $b < 3\sqrt{3}GM$  の衝突パラメータを持つ場合にはブラックホールに落ち込むことを示せ。
7.  $\{(\hat{e}_{\hat{\alpha}})^a\}$  が局所慣性になっていること

$$(\hat{e}_{\hat{\alpha}})^a \cdot (\hat{e}_{\hat{\beta}})^b = \eta_{\alpha\beta} \quad (6.69)$$

を示せ。

8. (6.66) 式を示せ。
9.  $r \geq 3GM$  の場合には外向きに進む光子のすべてが脱出可能であるが、半径の減少とともに脱出できる光子は減っていき、 $r = 2GM$  でちょうどすべての光子が脱出不可能となることを示せ。



# 第 7 章

## 重力波

準備中



## 第 8 章

# 一般相対論的天体の構造

準備中



## 第 9 章

# 一般相對論的宇宙論

準備中





## 付録 A

# 連続体の力学からのテンソル概念の導入

ここではテンソル概念を連続体の力学から導入する<sup>\*1</sup>。端的に言えば、テンソルとは、複数の方向概念を持つ物理量を取り扱うための数学的道具である。ここでは、歪みテンソル、応力テンソル、リーマンの曲率テンソルについて、これらの物理量が複数の方向概念を備えていることに着目して解説を行う。尚、この Appendix では、添字の上下を気にしない。

### A.1 歪みテンソル

#### A.1.1 ヘルムホルツ (Helmholtz) の基本定理

連続体中に微小距離離れた 2 点  $O(0, 0, 0)$ ,  $P(x, y, z) = P(x^1, x^2, x^3) = P(x^i)$  をとる。連続体の運動に伴って、 $O$  は  $O'$  に、 $P$  は  $P'$  に移動したとする。 $O\vec{O}' = s_0 = s(0)$ ,  $P\vec{P}' = s(x^i)$  とする。 $s(x^i)$  の各成分  $s_j$  をテイラー (Taylor) 展開して、1 次の微小量まで求めると

$$s_j(x^i) = s_j(0) + \frac{\partial s_j}{\partial x^i} x^i + \cdots = s_{j,0} + \partial_i s_j x^i + \cdots \quad (\text{A.1})$$

となる。ここで偏微分は  $O$  点で評価しており、 $s_j(0) = s_{j,0}$  とおいた。

(A.1) 式の右边第 2 項を形式的に対称部分と反対称部分に分けよう。

$$s_j(x^i) = s_{j,0} + \left[ \frac{1}{2} (\partial_i s_j + \partial_j s_i) x^i \right] + \left[ \frac{1}{2} (\partial_i s_j - \partial_j s_i) x^i \right] + \cdots \quad (\text{A.2})$$

これは、連続体の運動を次の 3 つの要素に分けたことに対応する。

並進運動 : (A.2) 式の右边第 1 項

添字  $j$  を 1 つ持つ右边第 1 項  $s_{j,0}$  は定ベクトルであり、並進運動を表す。ベクトルもテンソルの一種である。

回転運動 : (A.2) 式の右边第 3 項

右边第 3 項も添字  $j$  を 1 つ持つのでベクトル的な量である。これが回転運動を表すことが次のように分かる。 $\frac{1}{2} (\partial_i s_j - \partial_j s_i)$  は添字  $i, j$  について反対称であり、その独立成分の数は 3 である。したがって、レビ・チビタ記号  $\epsilon_{ijk}$  と、ベクトル  $\varphi^k$  を用いて、

$$\frac{1}{2} (\partial_i s_j - \partial_j s_i) = \epsilon_{ijk} \varphi^k \quad (\text{A.3})$$

<sup>\*1</sup>物理数学 C・D の講義ノートより抜粋したものである。

のように表すことができる。なぜならば、どちらも  $ij$  について反対称で、独立成分の数が 3 だからである。

すると、第 3 項は

$$\frac{1}{2}(\partial_i s_j - \partial_j s_i) x^i = \epsilon_{ijk} x^i \varphi^k = \epsilon_{jki} \varphi^k x^i = [\varphi \times \boldsymbol{x}]_j \quad (\text{A.4})$$

となる。これはベクトルの回転を表している。さらに、

$$\omega_{ij} x^i \equiv \frac{1}{2}(\partial_i s_j - \partial_j s_i) x^i \quad (\text{A.5})$$

と表して  $\omega_{ij}$  を定義すると、 $\omega_{ij}$  は添字 2 つを持つ量である。このように、添字を複数持つ量をテンソルという\*2。「添字を複数持つ」の「複数」には 0 や 1 も含めておくことにする。すると、添字を持たないスカラーや添字を 1 つだけ持つベクトルもテンソルの仲間である。

添字の数に応じて、0 階のテンソル、1 階のテンソル、2 階のテンソル、3 階のテンソル・・・という呼び方をする。すなわち、スカラーは 0 階のテンソル、ベクトルは 1 階のテンソルで、回転を表す  $\omega_{ij}$  は 2 階のテンソルである。

ここで、定義から分かるように  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$  である。このように、添字に対して反対称なテンソルを反対称テンソルという。すなわち、 $\omega_{ij}$  は 2 階の反対称テンソルである。

歪み運動：(A.2) 式の右辺第 2 項

次に、右辺第 2 項を

$$\epsilon_{ij} x^i \equiv \frac{1}{2}(\partial_i s_j + \partial_j s_i) x^i \quad (\text{A.6})$$

と書くことにする。 $\epsilon_{ij}$  は添字を 2 つ持つので、2 階のテンソルである。また、定義からわかるように  $\epsilon_{ij}$  は添字  $i, j$  について対称 ( $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ ) であるので、対称テンソルである。

$\epsilon_{ij}$  は数学的には対称行列で表現することができる対称行列は、固有値問題

$$\epsilon_{ij} X^j = \epsilon X_i \quad (\text{A.7})$$

を解くことによって、

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = \delta_i^j \epsilon_j \quad (\text{A.8})$$

のように、固有ベクトル  $X^i$  から作れる直交行列を用いて必ず対角形にすることができる。

このとき、固有値  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  は固有ベクトル  $X_1^j, X_2^j, X_3^j$  方向の伸び縮み率を表す。伸び縮みのない場合には、 $\epsilon_i = 1$  である。一般には  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq \epsilon_3$  であるから、立方体は直方体に、球は楕円体へと変形する(歪む)。そこで  $\epsilon_{ij}$  を歪みテンソルと呼ぶ。

#### ヘルムホルツ (Helmholtz) の基本定理

以上をまとめると、連続体の運動に伴う変形は、平行移動、回転、歪みをあらわす 3 つのテンソルで表すことができる。これをヘルムホルツの基本定理と呼ぶ。

ここで、連続体の変形を記述する物理量が 2 つの添字 (足) を持つ量、すなわち 2 階のテンソルとなるのは、変形度の値 (スカラー) を得るためには、

\*2 数学的に厳密に言えば、添字を複数持てば直ちにそれがテンソルであるというわけではなく、座標変換したときにどのように変換しなければならないか、という条件が付けられる。

1. 変形を記述するためには微小距離離れた 2 点の運動を追跡する必要があるが、その 2 点を結ぶベクトル  $(x^i)$
2. その 2 点を結ぶベクトルが指定された場合に、さらにその変形方向を決めるベクトル  $(s_j)$

の 2 つの方向 (ベクトル) を指定する必要があるからである。

歪みテンソルの例が示すように、物理においては、2 つ以上の方向属性をもつ物理量 (概念) が登場する。このような複数の方向概念を持つ物理量を取り扱うための数学的道具がテンソルであると理解しておいてよい。

### A.1.2 2 階のテンソルの座標基底による展開

あるベクトル  $V$  をベクトルの座標基底  $e_i$  の組で

$$V = V^i e_i = V^1 e_1 + V^2 e_2 + V^3 e_3 \quad (\text{A.9})$$

と表せた (展開できた) ように\*3、2 階のテンソルは、

$$\begin{aligned} T &= T^{ij} e_i e_j \\ &= T^{11} e_1 e_1 + T^{12} e_1 e_2 + T^{13} e_1 e_3 \\ &\quad + T^{21} e_2 e_1 + T^{22} e_2 e_2 + T^{23} e_2 e_3 \\ &\quad + T^{31} e_3 e_1 + T^{32} e_3 e_2 + T^{33} e_3 e_3 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

のように基底テンソル  $e_i e_j$  をもちいて表す (展開する) ことができるここで、左辺の  $T$  はテンソルそのものであり、右辺の  $T^{ij} e_i e_j$  はテンソル  $T$  の基底 ( $e_i$ ) を用いた表現で、 $T^{ij}$  は基底テンソル  $e_i e_j$  におけるテンソル  $T$  の成分である。

歪みテンソルを基底  $e_i$  を用いて表せば、 $\tau = \tau^{ij} e_i e_j$  となるが、このときの  $\tau^{ij}$  は対角形とは限らない。一方、歪みテンソルの固有ベクトル  $X_i$  を用いて  $\tau$  を表した  $\tau = \tau_X^{ij} X_i X_j$  の成分  $\tau_X^{ij}$  は対角形となる。

## A.2 応力テンソル

### A.2.1 応力ベクトルと応力テンソル

応力そのものはベクトルであるが、応力を考える場合には、それが作用する面、すなわち面要素ベクトルを必ず指定しなければならない。したがって、

————— 応力テンソルの解釈 (1) —————

応力の記述には、応力が働く面を決める法線ベクトルと、その面に働く応力の方向の 2 つのベクトルが必要である。したがって、応力の数学的な記述は 2 階のテンソルにならざるを得ない。

そこで、応力テンソルを  $\tau^{ij}$  のように導入し\*4、それに対して法線ベクトル  $n = n_j e^j$  が与えられたとき、 $T^i = \tau^{ij} n_j$  によって応力ベクトル (の成分) が得られる、と考えることにしよう。

基底も含めて考えると、応力ベクトルは

$$T = T^i e_i \quad (\text{A.11})$$

\*3ここで左辺の  $V$  はベクトルそのもの。右辺の  $V^i e_i$  はベクトル  $V$  の座標基底  $e_i$  を用いた表現で、 $V^i$  は基底  $e_i$  におけるベクトル  $V$  の成分である。

\*4 $\tau^{ij}$  は正確には応力テンソルの成分。

と展開できる。一方、応力テンソルに法線ベクトルを作用させたもの (内積をとったもの) が応力ベクトルになるとすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = (\tau^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot (n_k \mathbf{e}^k) = \mathbf{e}_i \tau^{ij} n_k (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^k) = \mathbf{e}_i \tau^{ij} n^k \delta_j^k \\ &= \tau^{ij} n_j \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

となるので、確かに  $T^i = \tau^{ij} n_j$  となっている。

## A.2.2 応力テンソルの 2 通りの解釈

(A.12) 式をもう一度見てみよう。連続体の変形を記述する歪みテンソルの例では、歪みテンソルが 2 階のテンソル (添字が 2 つ) となった理由は、(変形度という) スカラーを得るためには、変形の基準となる 2 点間のベクトルと、それが変形する方向の 2 つのベクトルを指定しなければならないからであった。一方、応力テンソルが 2 階のテンソルとなるのは、面要素の方向を一つ定めた場合に、応力ベクトルが決定されるものだからである。つまり、方向を決めて 1 つ添字をつぶしたときに、1 つだけ添え字が残っていなければならないから\*5である。この意味で、2 階のテンソルである応力テンソルは次のようにみなすことができる。

### —— 応力テンソルの解釈 (2) ——

応力テンソル  $\boldsymbol{\tau} = \tau^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  (2 階のテンソル) は、面要素の方向すなわち法線ベクトル  $\mathbf{n} = n_k \mathbf{e}^k$  (1 階のテンソル) が与えられたときに、その面にはたらく応力ベクトル  $\mathbf{T} = \tau^{ij} n_j \mathbf{e}_i$  (1 階のテンソル) を返す操作である。

この考え方を更に拡張しよう。歪みテンソルや応力テンソルに限らず、より一般に、

### —— 2 階のテンソルの 2 通りの解釈 ——

2 階のテンソル  $\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  は、

1. 任意のベクトル  $\mathbf{V} = V_j \mathbf{e}^j$  から、別のベクトル  $\mathbf{V}' = (T^{ij} V_j) \mathbf{e}_i$  を返す操作
2. 2 つのベクトル  $\mathbf{V} = V_i \mathbf{e}^i$ ,  $\mathbf{W} = W_j \mathbf{e}^j$  が与えられたときにスカラー  $T^{ij} V_i W_j$  を返す操作

のいずれの操作ともみなすことが可能である。

さらに、3 階のテンソル  $T^{ijk}$  は、任意のベクトル  $W_k$  に対して、2 階のテンソル  $T^{ijk} W_k$  を与える操作と見ることできるし、2 つのベクトル  $V_j, W_k$  から、ベクトル  $T^{ijk} V_j W_k$  を作り出す操作とも、さらには、3 つのベクトル  $U_i, V_j, W_k$  から、スカラー  $T^{ijk} U_i V_j W_k$  を返す操作とも考えることもできる。

## A.3 リーマンの曲率テンソル

最後に、ごく簡単にリーマンの曲率テンソルが  $R_{abcd}$  のように 4 つの添字を持つことを示しておこう。

リーマンの曲率テンソルとは、任意のベクトルを、任意の平行四辺形に沿って平行移動させて元の位置に戻したとき、元のベクトルとのズレを与えるものであった。すなわち、リーマンの曲率テンソルとは、ベクトル 1 つと平行四辺形 1 つを与えると、(ずれ) ベクトル 1 つを返すものである。平行四辺形の記述にはベクトル 2 つが必要である。すなわち、リーマンの曲率テンソルとは、ベクトル 3 つ (平行移動させるベクトル 1 つ, 平行四辺形を作るベクトル 2 つ) を与えると、(ずれ) ベクトル 1 つを返すものである。このような

\*5 1 階のテンソルすなわちベクトルでなければならないから。

物理量は、4つの添字を持つテンソルでなければならない。

例えば、平行移動させるベクトルを  $v$ , 平行四辺形を作るベクトルを  $X, Y$  として、4つの添字を持つリーマンの曲率テンソルを  $R_{abcd}$  とあわすと、(ずれ) ベクトル  $\Delta v$  は

$$\Delta v_a = R_{abcd} v^b X^c Y^d \quad (\text{A.13})$$

のように与えられる。



## 付録 B

# テンソル解析の初歩

ここでは、空間そのものは平坦であるが、座標系が曲がっている場合について考える<sup>\*1</sup>。この場合にも計量テンソルやクリストッフェル記号、および共変微分が導入されるが、これらは座標系が曲がっていることに起因するものであり、空間そのものの曲がりによって起因するものではないことに注意しよう。しかし、直感に馴染みやすい分、テンソル解析の理解には有用であろう。

### B.1 ベクトルの幾何学的定義

2次元ユークリッド平面において、デカルト座標から極座標への変換を考えよう。

$$\begin{cases} r = r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \theta(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = x(r, \theta) = r \cos \theta \\ y = y(r, \theta) = r \sin \theta \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

#### B.1.1 変位の変換則

微小距離離れた2点間の変位について、多変数関数の微分の公式をそのまま適用すれば、

$$\Delta r = \frac{\partial r}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial r}{\partial y} \Delta y = \frac{x}{r} \Delta x + \frac{y}{r} \Delta y = \cos \theta \Delta x + \sin \theta \Delta y \quad (\text{B.2})$$

$$\Delta \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \theta}{\partial y} \Delta y = -\frac{y}{r^2} \Delta x + \frac{x}{r^2} \Delta y = -\frac{\sin \theta}{r} \Delta x + \frac{\cos \theta}{r} \Delta y \quad (\text{B.3})$$

および、

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial x}{\partial \theta} \Delta \theta = \cos \theta \Delta r - r \sin \theta \Delta \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Delta r - y \Delta \theta \quad (\text{B.4})$$

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial y}{\partial \theta} \Delta \theta = \sin \theta \Delta r + r \cos \theta \Delta \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Delta r + x \Delta \theta \quad (\text{B.5})$$

が得られる。(B.2), (B.3) 式を行列表示して、

$$\begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

とすると、当然であるが、

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

<sup>\*1</sup>物理数学 C・D の講義ノートより抜粋したものである。

は (B.4), (B.5) 式に一致することがわかる。

極座標には限らない一般の座標系  $(\xi, \eta)$  への変換の場合にも、

$$\Delta\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\xi}{\partial y}\Delta y \quad (\text{B.8})$$

$$\Delta\eta = \frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\eta}{\partial y}\Delta y \quad (\text{B.9})$$

が成り立つ。 $(\xi, \eta)$  が質の良い座標であるためには、任意の異なる  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  が、異なる  $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$  に移されていることが必要である。そのためには、上の連立方程式の解が一意に定まっていなければならない。その条件は、

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (\text{B.10})$$

である。この行列式は座標変換 (B.8), (B.9) のヤコビアン (Jacobian) となっている。ヤコビアンがゼロになるような点があると、そこでの座標変換は特異になっている。

### B.1.2 ベクトルの幾何学的な定義：多変数関数の微分から

ベクトルを幾何学的に定義<sup>\*2</sup>する 1 つの方法は、

———— ベクトルの定義 ————

その成分が任意の座標変換の下で、変位と同じように変換するものをベクトルとして定義

することである。すなわち、変位  $(\Delta x, \Delta y)$  は変位ベクトル  $\Delta x$  のデカルト座標における成分である。変位ベクトルの成分の変換則 (B.8), (B.9) から、任意のベクトル  $V$  の成分について、

$$\begin{bmatrix} V^\xi \\ V^\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y} \\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^x \\ V^y \end{bmatrix} \equiv \Lambda \begin{bmatrix} V^x \\ V^y \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

が成り立つ。逆に、その成分が変換則 (B.11) に従うものをベクトルと呼ぶのである。

ここで、ベクトルについて 1 つ重要な注意をしておく<sup>\*3</sup>。それは、ベクトルは幾何学的な実体であり座標概念とは独立に存在するということである。すなわち、

$$V = V^x e_x + V^y e_y = V^\xi e_\xi + V^\eta e_\eta \quad (\text{B.12})$$

の  $V$  そのものは座標系に依らない普遍的な幾何学的実体であり、その座標成分 (観測者がする表現の仕方) が座標系 (あるいは物理学では観測者) によって異なるだけなのである (図 B.1 参照)。やや乱暴だが、これは、三角形を考えた場合に、三角形そのものは幾何学的なもので座標とは独立に存在し、その頂点の位置などの表現の仕方が座標系によって異なることに対比できる。

#### ベクトルの「成分」の変換則

ベクトルの成分の変換則をアインシュタインの和の規約を用いて表せば、

$$V^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} V^j \equiv \Lambda^{i'}_j V^j \quad (\text{B.13})$$

<sup>\*2</sup>代数的なベクトルの定義もある。普通の線形代数の教科書には必ず書かれているので調べてみる。

<sup>\*3</sup>ベクトルだけでなくテンソルなどの他の幾何学的対応物にも当てはまる。



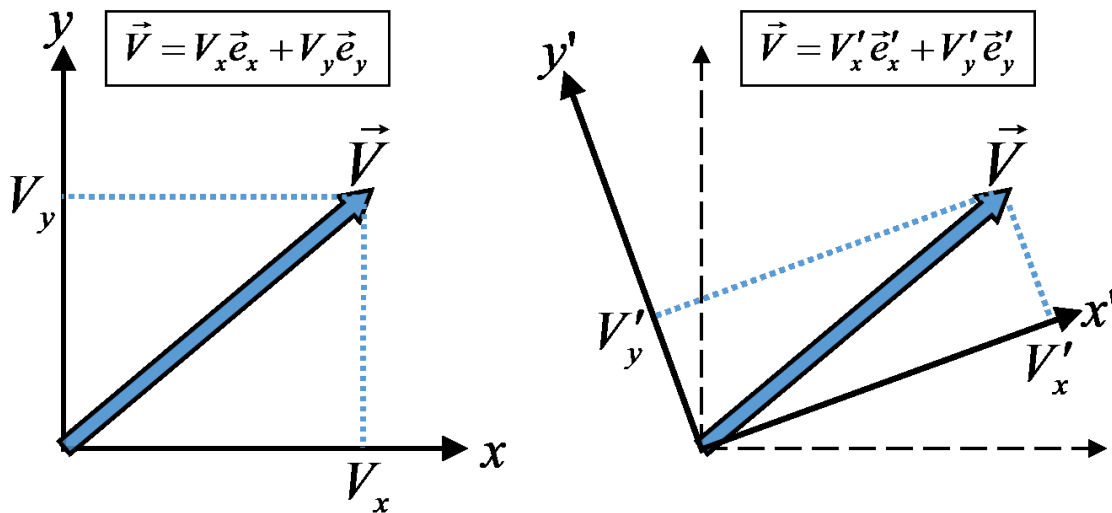


図 B.1 ベクトル  $\vec{V}$  は幾何学的実体であり座標変換で不変。その成分 (基底による表現) が変化するのみ。

となる。ここでプライム ' のついていない添字は  $(x, y)$  を、プライムがついている添字は  $(\xi, \eta)$  を表す。上記の例は 2 次元なので、添字の範囲は 1 ~ 2 である。また、これまでは添字の上下について特に違いはないとしてきたが、これ以降では添字を上下には重要な意味があるので注意してほしい<sup>\*4</sup>。多くの教科書で、ベクトルの成分を表す添字を上付きにするという約束がとられている。

この場合、座標基底ベクトルの方向を表す添字は下付きになる。アインシュタインの和の規約を用いると、(B.12) 式は

$$V = V^i e_i = V^{i'} e_{i'} \tag{B.15}$$

と書くことができる。ここで  $e_i$  と  $e_{i'}$  は異なる座標系の座標基底であることに注意しよう。繰り返しになるが、ベクトルは普遍的な幾何学的実体であり、その表し方が基底によって違うだけである。(B.15) 式はその事実を端的に表している。

### B.1.3 ベクトルの「基底」の変換則

ベクトルの成分の変換則から、座標基底ベクトルの変換則が次のようにして得られる。変換則 (B.11) を (B.15) に代入すると、

$$V = V^i e_i = \Lambda^{i'}_j V^j e_{i'} \tag{B.16}$$

となる。ここで、和が取られている添字は、他の添字との競合が生じない限り、自由に変えてよいことを用いると、

$$V = V^i e_i = V^i \Lambda^{j'}_i e_{j'} \longrightarrow V^i (e_i - \Lambda^{j'}_i e_{j'}) = 0 \tag{B.17}$$

<sup>\*4</sup>少しだけ先取りになるが簡単に触れておくと、その成分が

$$[\omega_\xi, \omega_\eta] = [\omega_x, \omega_y] \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}, \quad \omega_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \omega_j = \Lambda^{j'}_i \omega_j \tag{B.14}$$

のように変換する幾何学的対応物があるからである。双対ベクトル、あるいは 1 形式などと呼ばれる。

となるが、任意の  $V^i$  (すなわち任意の  $V$ ) について成り立つためには、座標基底ベクトルの変換則は、

$$e_i = \Lambda_{i'}^{j'} e_{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} e_{j'} \quad (\text{B.18})$$

でなければならない。ベクトルの成分と座標基底ベクトルの変換則との違いに注意しよう。

ここで、

$$\Lambda_{i'}^j \equiv \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \quad (\text{B.19})$$

を多変数関数の偏微分とみなして考えると、

$$\Lambda_{j'}^{i'} \Lambda_{i'}^k = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial}{\partial x^j} x^k(x^{i'}) = \frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta_j^k \quad (\text{B.20})$$

となるので、 $\Lambda_{i'}^k$  は  $\Lambda_{i'}^j$  の逆変換行列である。これを用いると、座標基底ベクトルの変換は、

$$e_{i'} = \Lambda_{i'}^j e_j \quad (\text{B.21})$$

とも表すことができる。

証明 ベクトルは幾何学的な存在であり、基底のとり方に依らない。ただし、成分は基底によって異なる。  
(B.12) 式をより抽象的にあらわせば、

$$V = V^i e_i = V^{i'} e_{i'} \quad (\text{B.22})$$

ここで、成分の変換則 (B.13) より、

$$V^{i'} e_{i'} = \Lambda_{i'}^j V^j e_{i'} = V^j (\Lambda_{i'}^j e_{i'}) \quad (\text{B.23})$$

この右辺が  $V^j e_j$  と等しくなるためには、

$$e_j = \Lambda_{i'}^j e_{i'} \quad (\text{B.24})$$

両辺に  $\Lambda_{k'}^j$  を作用させると、(B.20) 式より、

$$\Lambda_{k'}^j e_j = \Lambda_{k'}^j \Lambda_{i'}^j e_{i'} = \delta_{k'}^{i'} e_{i'} = e_{k'} \quad (\text{B.25})$$

添字を変えれば  $e_{i'} = \Lambda_{i'}^j e_j$ 。

## B.2 双対ベクトル

テンソルを定義するための次の準備として、双対ベクトルという概念を導入する。ここでは詳しくは述べないが、双対ベクトル空間は、ベクトル空間を考えると自然に (必ず) 導入されるもうひとつのベクトル空間であり、文字通りベクトルの双対 (dual, 双子) のようなものである\*5。双対ベクトルは、ベクトルから実数への線形関数 (写像) として与えられる\*6。

\*5 直感的には、縦ベクトルが与えられれば必ずそれを横ベクトル化したものが考えられるから、ベクトル空間にはその双子のベクトル空間が付随していると考えておけば十分である。より詳しい議論については、かなり高度になるが、斎藤 毅著、「線形代数の世界: 抽象数学の入り口」(東京大学出版会) を参照のこと。

\*6 これも直感的には、横ベクトル (双対ベクトル) と縦ベクトル (ベクトル) を (行列として) 掛ければ実数 (内積) になることから、横ベクトル (双対ベクトル) は縦ベクトル (ベクトル) から実数を作り出す操作 (関数・写像) として導入できると考えておけばよい。

## B.2.1 双対ベクトルの「成分」とその変換則

$\tilde{\omega}$  をある双対ベクトルとする。任意の座標基底  $e_i$  の下での  $\tilde{\omega}$  の成分  $\tilde{\omega}_i$  を、 $\tilde{\omega}$  によって  $e_i$  が移された実数値

$$\tilde{\omega}_i \equiv \tilde{\omega}(e_i) \quad (\text{B.26})$$

として定義する。

縦横ベクトルを用いた説明：横ベクトル (双対ベクトル)

$$\tilde{\omega} = [\tilde{\omega}_1 \quad \tilde{\omega}_2 \quad \tilde{\omega}_3] \quad (\text{B.27})$$

と基底縦ベクトル (ベクトルの座標基底)

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

との行列積 (内積) を計算すると、

$$\tilde{\omega}(e_1) = [\tilde{\omega}_1 \quad \tilde{\omega}_2 \quad \tilde{\omega}_3] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{\omega}_1, \quad \dots \quad (\text{B.29})$$

のようにその成分が得られる。定義 (B.26) はこのことを抽象化してあらわしたものである。

ここで、双対ベクトルの成分は下付きの添字を持ち、ベクトルの成分は上付き添字を持つと約束する。このように約束しておけば、双対ベクトルをあらわす  $\sim$  (チルダ) は不要になるが、以下の議論ではしばらく  $\sim$  (チルダ) を残しておくことにする。

## 双対ベクトルの線形性

双対ベクトル  $\tilde{\omega}$  の作用が線形であることは重要である。この性質により、任意のベクトル  $V = V^i e_i$  への作用において、 $V^i$  を外に出すことが可能となり、

$$\tilde{\omega}(V) = \tilde{\omega}(V^i e_i) = V^i \tilde{\omega}(e_i) = V^i \tilde{\omega}_i \quad (\text{B.30})$$

となる。この表式はベクトル  $V$  と双対ベクトルを単にベクトルとみなした  $\tilde{\omega}$  の内積とは異なる。どのように違うのかについては B.4 節で説明する。

双対ベクトルの成分の変換則を導こう。ベクトルの座標基底  $e_{i'}$  の下での成分は

$$\tilde{\omega}_{i'} = \tilde{\omega}(e_{i'}) = \tilde{\omega}(\Lambda_{i'}^j e_j) = \Lambda_{i'}^j \tilde{\omega}(e_j) = \Lambda_{i'}^j \tilde{\omega}_j \quad (\text{B.31})$$

のように変換する。これはベクトルの座標基底の変換則と同じであることに注意しよう\*7。双対ベクトルの成分の変換則より、双対ベクトルのベクトルへの作用は座標系に依らないことが示される。実際、

$$V^{i'} \tilde{\omega}_{i'} = (\Lambda_j^{i'} V^j) (\Lambda_{i'}^k \tilde{\omega}_k) = \Lambda_j^{i'} \Lambda_{i'}^k V^j \tilde{\omega}_k = \delta_j^k V^j \tilde{\omega}_k = V^j \tilde{\omega}_j = V^i \tilde{\omega}_i \quad (\text{B.32})$$

となるので、たしかに座標不変である。

\*7 成分の変換性が基底ベクトルの変換性と同じため、共変ベクトルと呼ばれることもあるが、一時代前の古めかしい響きを感じてしまう。

問題： 基底 (B.28) を用いた場合の双対横ベクトルの成分を  $\tilde{\omega} = [\tilde{\omega}_1 \quad \tilde{\omega}_2 \quad \tilde{\omega}_3]$  とする。基底縦ベクトルとして

$$e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.33})$$

を選んだ場合、双対横ベクトルの成分はどのようになるか。

略解  $\tilde{\omega}(e'_1)$  等の行列積を計算すればよい。

## B.2.2 双対ベクトルの「基底」とその変換則

双対ベクトルの基底双対ベクトルを考えよう。すなわち、

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_i \tilde{\xi}^i \quad (\text{B.34})$$

となるような基底双対ベクトル  $\tilde{\xi}^i$  を定義したい。この場合に双対ベクトルのベクトルへの作用を計算すると、

$$\tilde{\omega}(\mathbf{V}) = \tilde{\omega}_i \tilde{\xi}^i (V^j e_j) = \tilde{\omega}_i V^j \tilde{\xi}^i(e_j) \quad (\text{B.35})$$

となるので、これが (B.32) の結果と一致するためには、

$$\tilde{\xi}^i(e_j) = \delta_j^i \quad (\text{B.36})$$

が成り立っていばよい。これは、双対ベクトルの  $i$  番目の座標基底の、 $j$  番目の成分を定義している。

ベクトルの座標基底場合と同様に、双対ベクトルの座標基底の変換則は、 $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_i \tilde{\xi}^i = \tilde{\omega}_{i'} \tilde{\xi}^{i'}$  が座標に依らない幾何学的な存在であることと、双対ベクトルの成分の変換則 (B.31) から

$$\tilde{\xi}^{i'} = \Lambda_j^{i'} \tilde{\xi}^j \quad (\text{B.37})$$

のように得られる。

問題： 双対基底ベクトルを以下の場合について求めよ。

1. 基底縦ベクトルとして

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.38})$$

を選んだ場合。

2. 基底縦ベクトルとして

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.39})$$

を選んだ場合

略解 1. 基底横ベクトル (基底双対ベクトル) を

$$\tilde{\xi}^1 = [\tilde{\xi}_1^1 \quad \tilde{\xi}_2^1 \quad \tilde{\xi}_3^1], \quad \tilde{\xi}^2 = [\tilde{\xi}_1^2 \quad \tilde{\xi}_2^2 \quad \tilde{\xi}_3^2], \quad \tilde{\xi}^3 = [\tilde{\xi}_1^3 \quad \tilde{\xi}_2^3 \quad \tilde{\xi}_3^3] \quad (\text{B.40})$$

とおくと、

$$1 = \delta_1^1 = \tilde{\xi}^1(e_1) = [\tilde{\xi}_1^1 \quad \tilde{\xi}_2^1 \quad \tilde{\xi}_3^1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \xi_1^1 \quad (\text{B.41})$$

さらに、

$$0 = \delta_2^1 = \tilde{\xi}^1(e_2) = \xi_2^1, \quad 0 = \delta_2^1 = \tilde{\xi}^1(e_2) = \xi_3^1 \quad (\text{B.42})$$

よって、

$$\tilde{\xi}^1 = [1 \quad 0 \quad 0] \quad (\text{B.43})$$

同様に計算すれば、

$$\tilde{\xi}^2 = [0 \quad 1 \quad 0], \quad \tilde{\xi}^3 = [0 \quad 0 \quad 1] \quad (\text{B.44})$$

となる。

2. 各自の課題とする。

## B.3 テンソルの定義：双対ベクトルの拡張として

### B.3.1 (0,2) テンソル

(0,2) テンソルとは、2つのベクトルから実数への線形写像である\*8。双対ベクトルの場合の拡張として、任意の(0,2) テンソル  $T$  の成分  $T_{ij}$  は、

$$T_{ij} \equiv T(e_i, e_j) \quad (\text{B.45})$$

で与えられる。2つの任意のベクトル  $V, W$  への作用は、

$$T(V, W) = T(V^i e_i, W^j e_j) = V^i W^j T(e_i, e_j) = V^i W^j T_{ij} \quad (\text{B.46})$$

であり、これは座標不変である。ここで、テンソルの線形性のおかげで2番目の等号で  $V^i, W^j$  が前に出せたことに注意しよう。

#### (0,2) テンソルの基底

(0,2) テンソルの”基底”を  $\tau^{ij}$  とおくと、

$$T(V, W) = T_{ij} \tau^{ij}(V^k e_k, W^l e_l) = V^k W^l T_{ij} \tau^{ij}(e_k, e_l) \quad (\text{B.47})$$

となる。これが (B.46) 式と一致するためには、

$$\tau^{ij}(e_k, e_l) = \delta_k^i \delta_l^j \quad (\text{B.48})$$

であればよく、これは双対基底  $\xi^i$  を用いて、

$$\tau^{ij} = \tilde{\xi}^i \tilde{\xi}^j \quad (\text{B.49})$$

であれば成立する。これが(0,2) テンソルの”基底”である。すなわち、

$$T = T_{ij} \tilde{\xi}^i \tilde{\xi}^j \quad (\text{B.50})$$

である。

\*8この表記法を用いれば、双対ベクトルは(0,1) テンソルである。

(0,2) テンソルの成分の変換則

(0,2) テンソルの成分の変換則は、

$$T_{i'j'} = T(e_{i'}, e_{j'}) = T(\Lambda_{i'}^k e_k, \Lambda_{j'}^l e_l) = \Lambda_{i'}^k \Lambda_{j'}^l T(e_k, e_l) = \Lambda_{i'}^k \Lambda_{j'}^l T_{kl} \quad (\text{B.51})$$

で与えられる。

### B.3.2 (2,0) テンソルおよび (1,1) テンソル

同様に、(2,0) テンソルとは、2つの双対ベクトルから実数への線形写像であり、(1,1) テンソルとは、双対ベクトルとベクトルから実数を与える線形写像として定義される。より添字を多く持つ高階のテンソルについても同様である。

例えば、(2,0) テンソル  $T$  は

$$T = T^{ij} e_i e_j \quad (\text{B.52})$$

のように基底を用いて表され、その成分は確かに

$$T(\tilde{\xi}^i, \tilde{\xi}^j) = T^{kl} (e_k \tilde{\xi}^i)(e_l \tilde{\xi}^j) = T^{kl} \delta_k^i \delta_l^j = T^{ij} \quad (\text{B.53})$$

であり、成分の変換則は

$$T^{i'j'} = T(\tilde{\xi}^{i'}, \tilde{\xi}^{j'}) = T(\Lambda_{i'}^k \tilde{\xi}^k, \Lambda_{j'}^l \tilde{\xi}^l) = \Lambda_{i'}^k \Lambda_{j'}^l T^{kl} \quad (\text{B.54})$$

となる。

問題： (1,1) テンソル  $T$  が

$$T = T_i{}^j \tilde{\xi}^i e_j \quad (\text{B.55})$$

と基底を用いて表されることを説明し、その成分の変換則が

$$T_{i'}{}^{j'} = \Lambda_{i'}^k \Lambda_{j'}^l T_k{}^l \quad (\text{B.56})$$

となることを示せ。

## B.4 計量テンソル

### B.4.1 内積と計量テンソル

内積を、2つのベクトルからスカラーすなわち実数を与える操作であると考え、内積に関連する (0,2) のテンソルが定義できるのではないかと考えられる。実際、そのようなテンソルは存在し、計量テンソルと呼ばれる\*9。

内積演算子を  $\cdot$  とすると、ベクトル  $A$  と  $B$  の内積は

$$A \cdot B = (A^i e_i) \cdot (B^j e_j) = A^i B^j (e_i \cdot e_j) \quad (\text{B.57})$$

\*9計量テンソルは一般相対性理論で中心的な役割を果たす。

のように与えられる。一方、内積を与える (0,2) の計量テンソル  $g$  が存在するとすると、その作用は

$$g(A, B) = (g_{ij} \tilde{\xi}^i \tilde{\xi}^j)(A^k e_k)(B^l e_l) = g_{ij} A^k B^l \delta_k^i \delta_l^j = g_{ij} A^i B^j \quad (\text{B.58})$$

と表されるはずである。ここで、

$$g_{ij} \equiv g(e_i, e_j) \quad (\text{B.59})$$

は計量テンソルの成分である。(B.57) と (B.58) を比較すると、計量テンソルの成分は

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j \quad (\text{B.60})$$

で与えられることがわかる<sup>\*10</sup>。内積の対称性から、計量テンソルは対称テンソルである。すなわち、計量テンソルの成分は、

$$g_{ij} = g_{ji} \quad (\text{B.61})$$

を満たす。計量テンソルを用いると、ベクトルの内積は

$$A \cdot B = g_{ij} A^i B^j \quad (\text{B.62})$$

と表される。

3次元ユークリッド空間におけるデカルト座標の場合には、

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.63})$$

であるが、極座標や円筒座標の場合には計量テンソルの成分は違ったものになる。

#### B.4.2 ベクトルから双対ベクトルへの写像としての計量テンソル

ここで、後で基本的な役割を果たす重要な概念を導入する。それは、計量テンソルがベクトルと双対ベクトルの間の写像として働くという考え方である。これを見るために、計量テンソル  $g$  と1つのベクトル  $V$  を考えよう。 $g$  はスカラー (実数) 値を与えるために2つのベクトルを必要とするから、 $g(V)$  は、(もう1つ) ベクトルが与えられれば実数値を与える写像と考えることができる。これはすなわち、 $g(V)$  を双対ベクトルと考えることができることを意味している。これを

$$\tilde{V} \equiv g(V) \quad (\text{B.64})$$

と書くことにする。

$\tilde{V}$  の成分を求めると、(B.64) 式より、

$$\tilde{V}_i = \tilde{V}(e_i) = g(V, e_i) = g(V^j e_j, e_i) = g_{ij} V^j \quad (\text{B.65})$$

である。これは、ベクトル  $V$  の成分の上付き添字を、計量テンソル (の成分) で下げて双対ベクトル化したと捉えることができる。

<sup>\*10</sup>ユークリッド空間や、特殊相対性理論におけるミンコフスキー時空のように、内積が自然に定義される場合には、内積によって計量テンソルの成分を与えるこの考え方でよい。しかし、一般相対性理論におけるような曲がった時空や空間の場合には、自然な内積が存在しないので、議論を逆転する必要がある。すなわち、計量テンソルを決めると (空間あるいは時空の性質が決まり)、内積が定義されると考えなければならない。

### B.4.3 内積操作と双対ベクトルの関係

すると、ベクトル  $A$  と  $B$  の内積は、

1. 計量テンソル  $g$  によってベクトル  $A$  (あるいはベクトル  $B$ ) から双対ベクトル  $\tilde{A} = g(A)$  (あるいは  $\tilde{B}$ ) を作り出し、
2. それをもう一方のベクトル  $B$  (あるいは  $A$ ) に作用させる操作である。

と捉え直すことができる。この観点は極座標などの”曲がった”座標系でのベクトル解析を展開する上で重要となる。

#### 補足説明

注意すべきは「双対ベクトル」は「内積あるいは計量テンソル」が存在しない(あるいは定義されていない)場合にも導入できるという点である。線形(ベクトル)空間を考えると、自然に双対ベクトル(双対構造)を導入することができる。この線形空間にさらに計量テンソル(内積構造)を導入すれば、内積操作と双対ベクトルを関係づけることができる。

### B.4.4 計量テンソルの「逆」

さらに、計量テンソルの成分  $g_{ij}$  を行列とみなしたとき、それが逆行列  $g^{ij}$  を持てば、すなわち、

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k \quad (\text{B.66})$$

を満たす  $g^{jk}$  が存在すれば、 $g^{jk}$  を成分として持つ (2,0) テンソル

$$\mathbf{g}^{-1} \equiv g^{ij}e_i e_j \quad (\text{B.67})$$

を定義することができる。これは計量テンソルの”逆”ともいうべきものである。 $g^{-1}$  の双対ベクトル  $\tilde{V}$  への作用は、

$$V^i e_i = \mathbf{V} = \mathbf{g}^{-1}(\tilde{V}) = g^{ij}e_i e_j \tilde{V}_k \tilde{\xi}^k = g^{ij} \tilde{V}_k e_i \delta_j^k = g^{ij} \tilde{V}_j e_i \quad (\text{B.68})$$

であることから、

$$V^i = g^{ij} \tilde{V}_j \quad (\text{B.69})$$

である。

(B.69) 式より、両辺に  $W_i$  を作用させると\*11

$$(\text{左辺}) = V^i W_i = V^i (g_{ij} W^j) = g_{ij} V^i W^j = \mathbf{V} \cdot \mathbf{W} \quad (\text{B.70})$$

$$(\text{右辺}) = g^{ij} \tilde{V}_i \tilde{W}_j = \mathbf{g}^{-1}(\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}) \quad (\text{B.71})$$

となる。ここで、双対ベクトルの内積にも記号  $\cdot$  を用いれば、

$$\mathbf{g}^{-1}(\tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}) = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\mathbf{W}} \quad (\text{B.72})$$

となるので、ベクトル同士の内積は、それを計量テンソルで双対ベクトル化したものの内積に等しい ( $\mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\mathbf{W}}$ , あるいは  $g_{ij} V^i V^j = g^{ij} \tilde{V}_i \tilde{V}_j$ ) ことになる。さらに、

$$g^{ij} \tilde{V}_i \tilde{W}_j = \tilde{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\mathbf{W}} = (\tilde{V}_i \tilde{\xi}^i) \cdot (\tilde{W}_j \tilde{\xi}^j) = \tilde{V}_i \tilde{W}_j (\tilde{\xi}^i \cdot \tilde{\xi}^j) \quad (\text{B.73})$$

\*11 アインシュタインの和の規約を用いているので、添字  $i$  についての和が取られることになる点に注意されたい。



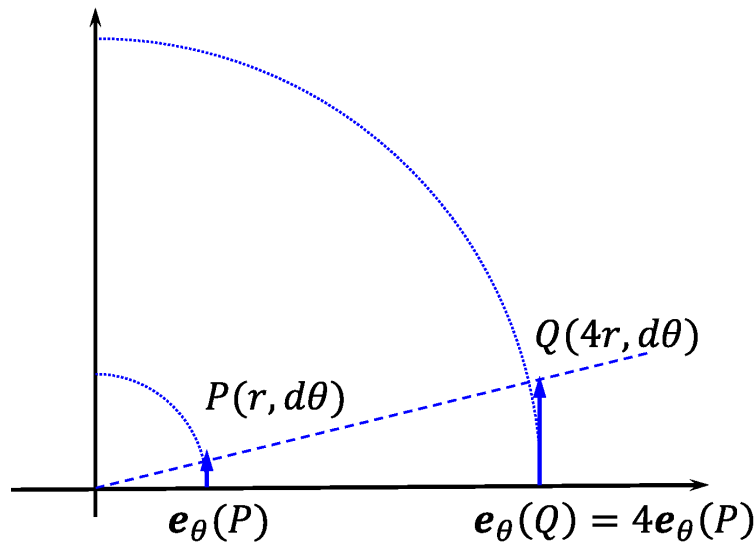


図 B.2 2次元極座標における同一の  $\theta$  座標を持つ点  $P, Q$  の位置及び  $\theta$  方向の座標基底  $e_\theta$  の  $r$  依存性

より、

$$g^{ij} = \tilde{\xi}^i \cdot \tilde{\xi}^j \quad (\text{B.74})$$

であることもわかる。

ユークリッド空間でデカルト座標を張った場合には、計量テンソルは  $g_{ij} = \delta_{ij}$  であるから、

$$\tilde{V}_i = g_{ij} V^j = \delta_{ij} V^j = V_i (= V^i) \quad (\text{B.75})$$

であり、ベクトル  $V$  の成分  $V^i$  と双対ベクトル  $\tilde{V}$  の成分  $\tilde{V}_i$  に本質的な違いはない。しかし、極座標や円筒座標などの曲がった座標系や、一般相対性理論にあらわれる曲がった空間の場合には一般に  $g_{ij} \neq \delta_{ij}$  であり、ベクトルと双対ベクトルの成分は違ったものであり、添字の上付きと下付きは異なるものであることに注意する必要がある。

ただしこの場合にも、

$$V^i \tilde{W}_i = V^i g_{ij} W^j = g_{ij} V^i W^j = \tilde{V}_j W^j = \tilde{V}_i W^i \quad (\text{B.76})$$

であり、先に決めた約束の通り、ベクトルと双対ベクトルの成分を添え字の上下だけで判定して  $\sim$  (チルダ) を用いないことにすれば、

$$V^i W_i = V_i W^i \quad (\text{B.77})$$

となる。すなわち、内積 (より一般に和がとられている添字) については、基本的にその上下を気にしなくてよい。

#### B.4.5 2次元極座標系での計量テンソル

2次元極座標を例に、計量テンソルの成分を計算しよう。座標基底の変換則 (B.21) より、

$$\mathbf{e}_r = \Lambda_r^x \mathbf{e}_x + \Lambda_r^y \mathbf{e}_y = \frac{\partial x}{\partial r} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r} \mathbf{e}_y = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (\text{B.78})$$

$$\mathbf{e}_\theta = \Lambda_\theta^x \mathbf{e}_x + \Lambda_\theta^y \mathbf{e}_y = \frac{\partial x}{\partial \theta} \mathbf{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \mathbf{e}_y = -r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y \quad (\text{B.79})$$

である。ここで、演習問題 1.2.1 の場合とは異なり、 $e_\theta$  は規格化されていないことに注意しよう。実際

$$|e_\theta| = r \quad (\text{B.80})$$

となっている。

ここで、 $e_\theta$  が  $r$  に依存するのは、この場合には、座標 (格子点) を基本としているからである<sup>\*12</sup>。例えば、図 B.2 に示すように、2 次元極座標で点  $P(r_P, \theta_P) = (r, d\theta)$  と、点  $Q(r_Q, \theta_Q) = (4r, d\theta)$  を比べたとき、 $\theta$  座標は  $\theta_P = \theta_Q$  で同じであるが、その幾何学的な位置 ( $\theta = 0$  ( $x$  軸) からの離れ具合) は異なる。このことは、点  $Q$  における座標基底ベクトルが点  $P$  の座標基底ベクトルよりも長くなっていなければならないことを意味する。すなわち、 $r$  の値によって  $e_\theta$  の大きさが変わらなければならない。したがって、規格化された基底を用いた通常のベクトル解析の結果と一部異なるところがあることに注意する必要がある。

同様に、基底双対ベクトルは (B.37) より、

$$\tilde{\xi}^r = \frac{\partial r}{\partial x} \tilde{\xi}^x + \frac{\partial r}{\partial y} \tilde{\xi}^y = \cos \theta \tilde{\xi}^x + \sin \theta \tilde{\xi}^y \quad (\text{B.81})$$

$$\tilde{\xi}^\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} \tilde{\xi}^x + \frac{\partial \theta}{\partial y} \tilde{\xi}^y = -\frac{\sin \theta}{r} \tilde{\xi}^x + \frac{\cos \theta}{r} \tilde{\xi}^y \quad (\text{B.82})$$

となる。

これより、計量テンソルの成分は、

$$g_{rr} = e_r \cdot e_r = 1, \quad g_{\theta\theta} = e_\theta \cdot e_\theta = r^2, \quad g_{r\theta} = g_{\theta r} = 0 \quad (\text{B.83})$$

および、

$$g^{rr} = \tilde{\xi}^r \cdot \tilde{\xi}^r = 1, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{r\theta} = g^{\theta r} = 0 \quad (\text{B.84})$$

となる。(B.83) を

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.85})$$

と行列表示してその逆を求めると

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.86})$$

となり、これは (B.84) の結果と一致している。

## B.5 共変微分とクリストッフェル (Christoffel) 記号

### B.5.1 クリストッフェル記号

ベクトルの微分を考える際には、座標基底ベクトルが一定であるかどうかには注意する必要がある。すなわち、 $V = V^i e_i$  の微分は、

$$\frac{\partial V}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} (V^i e_i) = \frac{\partial V^i}{\partial x^j} e_i + V^i \frac{\partial e_i}{\partial x^j} \quad (\text{B.87})$$

であることに注意する必要がある。ここで、 $\partial e_i / \partial x^j$  はベクトルであるから、座標基底  $e_k$  で展開できるはずである。それを

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} e_k \quad (\text{B.88})$$

と表そう。 $\Gamma^k_{ij}$  が 3 つの添字を必要とすることに注意しよう。すなわち、

<sup>\*12</sup>このような基底を座標基底と呼ぶ。これに対して、演習問題 1.2 における規格化された基底は非座標基底と呼ばれる。

1.  $i$  番目の座標基底ベクトルを
2.  $j$  方向に微分してできたベクトルの
3.  $k$  成分が  $\Gamma^k_{ij}$  である。

この  $\Gamma^k_{ij}$  は非常に有用であり、クリストッフェル (Christoffel) 記号と呼ばれる。

例として、2次元極座標の場合に、クリストッフェル記号を計算しよう。この場合、例えば  $\partial e_\theta / \partial r$  を計算すると、(B.88) 式から分かるように、 $\Gamma^k_{\theta r}$  を求めることができる。実際に微分を実行すると、

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (-r \sin \theta e_x + r \cos \theta e_y) = \frac{1}{r} e_\theta = 0 \cdot e_r + \frac{1}{r} e_\theta \quad (\text{B.89})$$

これと (B.88) 式から成り立つ

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial r} = \Gamma^r_{\theta r} e_r + \Gamma^\theta_{\theta r} e_\theta \quad (\text{B.90})$$

を比べると

$$\Gamma^r_{\theta r} = 0, \quad \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} \quad (\text{B.91})$$

が得られる。

座標基底ベクトルのこれ以外の微分を計算すると、その他のクリストッフェル記号を求めることができ、その結果は

$$\frac{\partial e_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (\cos \theta e_x + \sin \theta e_y) = 0 \rightarrow \Gamma^r_{rr} = \Gamma^\theta_{rr} = 0 \quad (\text{B.92})$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = -\sin \theta e_x + \cos \theta e_y = \frac{1}{r} e_\theta \rightarrow \Gamma^r_{r\theta} = 0, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \quad (\text{B.93})$$

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = r \cos \theta e_x - r \sin \theta e_y = -r e_r \rightarrow \Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0 \quad (\text{B.94})$$

である。

## B.5.2 ベクトル場の共変微分

クリストッフェル記号を用いると、ベクトルの微分 (B.87) は

$$\frac{\partial V}{\partial x^j} = \frac{\partial V^i}{\partial x^j} e_i + V^i \Gamma^k_{ij} e_k \quad (\text{B.95})$$

となる。ここで、和がとられている添字は競合が生じない限り自由に付け替えることができるから、

$$\frac{\partial V}{\partial x^j} = \frac{\partial V^i}{\partial x^j} e_i + V^k \Gamma^i_{kj} e_i = \left[ \frac{\partial V^i}{\partial x^j} + V^k \Gamma^i_{kj} \right] e_i \quad (\text{B.96})$$

と書きなおすことができる。この結果をまとめて、ベクトル場の微分は、

$$\nabla_j V^i \equiv \frac{\partial V^i}{\partial x^j} + V^k \Gamma^i_{kj} \quad (\text{B.97})$$

なる成分を持つとあらわそう。

かなり面倒ではあるが、単純な計算によって、 $\nabla_j V^i$  は (1,1) テンソルの成分の変換則 (B.56)

$$\nabla_{j'} V^{i'} = \Lambda^{k'}_{j'} \Lambda^{i'}_{l'} \nabla_k V^l \quad (\text{B.98})$$

を満たすことを示すことができる\*13。したがって、ベクトルすなわち (1,0) テンソルに作用して (1,1) テンソルを与え、その (1,1) テンソルの成分が (B.97) となる操作 (微分) を定義することができる。これを共変

\*13 一方、 $\partial_j V^i$  は (1,1) テンソルの成分の変換則 (B.56) を満たさない。

微分という<sup>\*14</sup>。共変微分は、極座標や円筒座標のように座標系が曲がっている場合や、一般相対性理論にあらわれる曲がった時空におけるベクトル場やテンソル場を解析する上で重要な役割を果たす。

(B.97) 式より、共変微分と偏微分の違いはクリストッフェル記号によるものである。一方、(B.88) 式より、クリストッフェル記号は座標基底ベクトルの微分がゼロでないことからあらわれた。演習問題 1.2 においても、極座標系では座標基底ベクトルの微分がゼロでないことから、ベクトル場の発散やスカラー場のラプラシアンに余分な項があらわれた。実は、共変微分 (B.97) におけるクリストッフェル記号の項は、この余分な項となっている。

任意の座標系でのベクトルの発散は共変微分を用いて与えられ、

$$\nabla_i V^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + V^k \Gamma^i_{ki} \quad (\text{B.99})$$

である。2次元極座標では、

$$\Gamma^i_{ri} = \Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \quad (\text{B.100})$$

$$\Gamma^\theta_{\theta i} = \Gamma^r_{\theta r} + \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0 \quad (\text{B.101})$$

であるから、ベクトル場の発散は、

$$\nabla_i V^i = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} + V^r \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV^r) + \frac{\partial}{\partial \theta} V^\theta \quad (\text{B.102})$$

となる。

これは通常のベクトル解析の結果と比べると、 $\partial V^\theta / \partial \theta$  の前の因子  $1/r$  だけ違うが、これは本章のテンソル解析では  $e_\theta$  の大きさが  $r$  となっていることに起因して、成分  $V^\theta$  の大きさが  $1/r$  倍になっているためである。すなわち、 $V_{8\text{章}}^\theta = \frac{1}{r} V_{1\text{章}}^\theta$  である。この違いを元に戻せば、両者は一致する。

次に、2次元極座標におけるスカラー場  $\phi$  へのラプラシアンを作用を求めよう。ラプラシアンは勾配の発散であるから、双対ベクトル (の成分)  $V_j = \partial_j \phi$  からベクトル (の成分)  $V^i = \partial^i \phi = g^{ij} \partial_j \phi$  を作り<sup>\*15</sup>、それを (B.102) に代入すれば得られ、その結果は

$$\nabla_i \partial^i \phi = \nabla_i (g^{ij} \partial_j \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (\text{B.103})$$

となる。

### B.5.3 双対ベクトル場の共変微分

スカラー場は、座標系すなわち座標基底に依存しないので、その共変微分は普通の微分 (偏微分) と同じである。すなわち、

$$\nabla_i \phi = \partial_i \phi \quad (\text{B.104})$$

である。

双対ベクトル  $\tilde{\omega}$  がベクトル  $V$  へ作用した結果  $\omega_j V^j$  はスカラーであるから座標系によらない。したがって、その共変微分はやはり普通の微分と同じ

$$\nabla_i (\omega_j V^j) = \partial_i (\omega_j V^j) \quad (\text{B.105})$$

<sup>\*14</sup>実は、より一般的に、共変微分は  $(n, m)$  テンソルに作用して  $(n, m + 1)$  テンソルを与える。

<sup>\*15</sup>スカラー場は座標系に依存しないのでその共変微分は偏微分と同じである。

である。

ここで、

$$(\text{左辺}) = (\nabla_i V^j) \omega_j + V^j \nabla_i \omega_j = \left[ \partial_i V^j + \Gamma_{ki}^j V^k \right] \omega_j + V^j \nabla_i \omega_j \quad (\text{B.106})$$

および

$$(\text{右辺}) = (\partial_i V^j) \omega_j + V^j \partial_i \omega_j, \quad (\text{B.107})$$

より、和が取られている添字を適当に付け替えると、

$$V^j \left[ \nabla_i \omega_j - (\partial_i \omega_j - \Gamma_{ji}^k \omega_k) \right] = 0 \quad (\text{B.108})$$

の形にまとめることができる。これが任意の  $V^j$  について成り立つので、これより、双対ベクトルの共変微分が

$$\nabla_i \omega_j = \partial_i \omega_j - \Gamma_{ji}^k \omega_k \quad (\text{B.109})$$

で与えられることがわかる。

問題： 双対ベクトルの共変微分の成分が (B.109) 式となることを示せ。

#### B.5.4 テンソル場の共変微分

同様に、 $T_{ij} V^i W^j$  がスカラーであることから、(0,2) テンソルの共変微分の成分が

$$\nabla_k T_{ij} = \partial_k T_{ij} - T_{lj} \Gamma_{ik}^l - T_{il} \Gamma_{jk}^l \quad (\text{B.110})$$

で与えられることを示すことができる (演習問題)。

その他のテンソルの共変微分についても同様に計算することができる。

## B.6 クリストッフェル記号と計量テンソルの関係

### B.6.1 クリストッフェル記号の対称性

スカラー場の 2 階共変微分を考える。共変微分の性質より、それは (0,2) テンソルである。さて、デカルト座標では座標基底ベクトルが一定であるので、共変微分は偏微分と同じである。したがって、

$$\nabla_i \nabla_j \phi = \partial_i \partial_j \phi \quad (\text{B.111})$$

である。偏微分は交換可能

$$\partial_i \partial_j \phi = \partial_j \partial_i \phi \quad (\text{B.112})$$

であるから、(0,2) テンソル  $\nabla_i \nabla_j \phi$  はデカルト座標では対称テンソルである。テンソルの対称性は (連続な空間的) 座標変換によって変わらないから、座標変換をそのようなものに限定すれば、 $\nabla_i \nabla_j \phi$  は任意の座標系で対称

$$\nabla_i \nabla_j \phi = \nabla_j \nabla_i \phi \quad (\text{B.113})$$

であると考えられる。

$\nabla_i \phi$ ,  $\nabla_j \phi$  は双対ベクトルであるから、両辺を (B.109) で評価して比較すると、

$$(\nabla_k \phi) \Gamma_{ij}^k = (\nabla_k \phi) \Gamma_{ji}^k \quad (\text{B.114})$$

となる。これよりクリストッフェル記号の下付き添字は対称であることがわかる<sup>\*16</sup>。

### B.6.2 計量テンソルの共変微分

デカルト座標では計量テンソルは一定であるから<sup>\*17</sup>、その共変微分はゼロである。

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \quad (\text{デカルト座標で}) \quad (\text{B.115})$$

ここで、この結果を、共変微分によって (0,2) テンソルである計量テンソルが (0,3) テンソルに移され、その (0,3) テンソルの成分がデカルト座標ではゼロになるものとみなす。(0,3) テンソルの変換則は

$$T_{i'j'k'} = \Lambda_{i'}^l \Lambda_{j'}^m \Lambda_{k'}^n T_{lmn} \quad (\text{B.116})$$

であるから、あるひとつの座標系で (0,3) テンソルの成分がすべてゼロになるならば、任意の座標でゼロである。したがって、

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \quad (\text{任意の座標で}) \quad (\text{B.117})$$

が成立する。

したがって、(0,2) テンソルの共変微分 (B.110) より、

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il} \quad (\text{B.118})$$

となる。少し混みいった添字の付け替え

$$\partial_j g_{ik} = \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \Gamma_{jk}^l g_{il} \quad (\text{B.119})$$

$$-\partial_i g_{jk} = -\Gamma_{ji}^l g_{lk} - \Gamma_{ik}^l g_{jl} \quad (\text{B.120})$$

$$(\text{B.121})$$

を考え、これら 3 式を加え、計量テンソルが対称テンソルであること、およびクリストッフェル記号の対称性 (B.113) を用いると、

$$\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk} = 2g_{il} \Gamma_{jk}^l \quad (\text{B.122})$$

が得られる。

ここで (B.122) 式の両辺に  $g^{im}$  を作用させて、 $g^{im} g_{il} = \delta_l^m$  に注意すると、

$$\Gamma_{jk}^m = \frac{1}{2} g^{im} (\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}) \quad (\text{B.123})$$

が得られる。これがクリストッフェル記号と計量テンソルの関係式である<sup>\*18</sup>。これより、計量テンソルさえ与えられれば、クリストッフェル記号及び共変微分を計算することができることになる。

<sup>\*16</sup> ユークリッド空間においてはこれでよい。実は、(B.113) 式が成り立たないねじれた空間を考えることも可能であり、この場合にはクリストッフェル記号の下付き添字は対称ではなくなるが、ここでは取り扱わない。

<sup>\*17</sup> 本講義では深入りしないが、これは平坦な場合に限った話である。地球表面や一般相対論におけるブラックホール時空のように曲がった空間 (時空) の計量テンソルは一定ではない。

<sup>\*18</sup> 一般相対論におけるブラックホール時空のように曲がった空間 (時空) の場合にも、(B.123) 式で定義されるクリストッフェル記号を用いて計量テンソルの共変微分を計算すれば、 $\nabla_k g_{ij} = 0$  となっている。